Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Folgen und Reihen

Wir wollen uns in diesem Kurs mit einem wichtigen Begriff der Analysis beschäftigen, den Folgen. Wir werden später feststellen, dass Reihen auh ein Art Folgen sind. Wir werden einige Arten der Beschreibung und Definition von Folgen kennenlernen.
Dieser Kurs richtet sich an alle Interessierten, wird aber hauptsächlich für Schüler der Sekundarstufe II ausgelegt sein, in einigen weiterführenden Kapitel, die mit $*$ gekennzeichnet sind, werden weiterführende Probleme besprochen und andere begriffe entwickelt, die für das Studium wichtig sind.

1.1 Folgen

Wir wollen uns zunächst mit der Entwicklung eines Begriffs ' Zahlenfolge' beschäftigen. Was wollen wir also darunter verstehen?

Wir kennen alle aus diversen Tests (Einstellungs-Tests, IQ-Tests, ...), folgendes Beispiel:

Vervollständigen Sie folgende Zahlenfolge:

$$2, 4, 6, 8, ...$$

Offensichtlich handelt es sich hierbei um die Folge der **geraden** Zahlen.
Also kennen wir schon verschiedene Beispiele für Zahlenfolgen, wir wollen uns nun nicht nur auf Zahlenfolgen beschränken, die nur aus nätrlichen Zahlen bestehen. Wir kennen z.B.

$$-1, 1, -1, 1, -1, ...$$

welche eine Zahlenfolgen von ganzen Zahlen ist.
Aber auch dies wäre eine sehr starke Einschränkung, schliesslich kennen wir auch

$$0,4; 0,44; 0,444; ...$$

was sich immer mehr der Zahl $0,\overline{4}$, einer sogenannten **rationalen** Zahl annähert. Oder z.B.

$$1,0; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; ...$$

was sich, vielleicht nicht ganz so offensichtlich, der sogenannten **irrationalen** Zahl $\sqrt{2}$ annähert.

Wir wollen also sogenannte **reelle Zahlenfolgen** betrachten, alle obigen Zahlenfolgen sind hierdrin enthalten.

1.1.1 Definition einer reellen Zahlenfolge

Wir wollen nun einen umfassenden Begriff entwickeln, der unabhängig von der **Darstellung** der Zahlenfolge ist. Uns ist aus dem Kurs *Funktionen* der Begriff einer Funktion oder Abbildung bekannt, dies wollen wir nun verwenden.

Definition 1.1.1. *Eine reelle Zahlenfolge ist eine Abbildung a:* $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$

Dies bedeutet, dass jeder natürlichen Zahl genau eine reelle Zahl zugeordnet wird. Wir haben nun in den obigen Beispielen eine Gemeinsamkeit gesehen, nämlich folgende:
Es gibt ein erstes, ein zweites usw. Folgenglied. Das erste Folenglied bezeichnen wir mit a(1) das zweite mit a(2), also sehen wir nun wieso eine Zahlenfolge eine solche Abbildung ist.

Definition 1.1.2. *Statt a(k) schreiben wir* a_k *und nennen dies das k-te Folgenglied. Für die Folge schreiben wir statt a auch* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *oder einfach nur* (a_n)

Wie können wir nun diese Abbildung beschreiben? Hierzu gibt es drei verschiedene Möglichkeiten:

1.1.1.1 explizite Darstellung

Diese Möglichkeit haben wir schon in den obigen Beispielen kennengelernt. Sie ist die schlechteste, da sie sich nur fr wenige Folgen eignet, denn wieso sollte eine Folge schon durch vier Glieder bestimmt sein, oder durch 8 oder 1000000? Wir haben schon am letzten Beispiel ($\sqrt{2}$) gesehen, dass man nicht einmal durch ein paar Folgenglieder die Vorschrift erkennen kann, dennoch ergibt sich noch ein viel grösseres Problem. Die Folgen werden hierdurch nicht einmal eindeutig bestimmt

Beispiel 1.1.3. *Wir betrachten*

$$2; 4; 6; ...$$

Man könnte nun annehmen dies sei wieder die Folge aller geraden natürlich Zahlen, aber es könnte auch sein

$$(a_n) = \begin{cases} 2n & n < 4 \\ n & sonst \end{cases}$$

wäre also

$$2; 4; 6; 4; 5; 6; 7...$$

Auf diegleiche Weise können wir auch die Folge definieren, wenn wir 100000000 Folgenglieder schon explizit angegeben haben.

Meistens wird eine der beiden anderen Weisen benutzt und eine explizite Form zur Illustration benutzt.

1.1.1.2 Abbildungsdefinition

Wie wir aus dem Kurs Funktionen schon wissen können wir eine Abbildung durch eine Abbildungsgleichung f(x) = x darstellen. Für natürliche Zahlen verwenden wir aber statt x den Buchstaben n, d.h. wir schreiben z.B.

$$a(n) = n$$

bzw.

$$(a_n) = n$$

Wir wollen nun ein paar Beispiele hierfür betrachten

Beispiel 1.1.4. *Beispiele für reelle Zahlenfolgen sind*

$$a(n) = n$$

$$a(n) = n^2$$

$$a(n) = 2$$

$$a(n) = 2 \cdot n$$

$$a(n) = \pi \cdot n$$

Wir werden am häufigsten diese Form benutzen und betrachten.

1.1.1.3 rekursive Darstellung

Es gibt eine dritte ziemlich unbequeme Möglichkeit eine Zahlefolge festzulegen, die rekursive. Dies ist eine Möglichkeit ein beliebiges Folgenglied durch die vorhergehenden festzulegen.
Wir erläutern dies an einem

Beispiel 1.1.5. *Betrachten wir*

$$(a_n) = 0$$

eine rekusive Darstellung dieser Folge ist

$$a_1 = 0 \qquad a_n = a_{n-1}$$

Das heisst wir definieren das n-te Folgenglied durch das (n-1)-te, das durch das (n-2)-te Folgenglied definiert ist, was durch... Aufdeise Weise springen wir von einem festen Glied n zurück zu einem, welches wir explizit berechnen können. Daher kommt der Name Rekusion (zurücklaufen, zurückspringen). Wir wollen hierzu ein weiteres Beispiel betrachten.

Beispiel 1.1.6. *Ein Kaninchenpaar wirft jeden Monat genau ein neues Kaninchenpaar, das sich jeweils vom 2.Monat an auf die gleiche Weise vermehrt. Wieviele Kaninchenpaare sind nach einem Jahr vorhanden, wenn keines vorher stirbt ?*
Wir veranschaulichen die Entwicklung in einer expliziten Zahlenfolge:

1. Monat: 1
2. Monat: 2 das erste Paar hat geworfen
3. Monat: 3 das erste Paar hat wieder geworfen, das zweite ist noch nicht zeugungsfähig
4. Monat: 5 erstes und zweites Paar haben geworfen
5. Monat: 8 . . .
. . .

Das Prinzip sieht man schon und somit ergibt sich folgende Zahlenfolge:

$$a_1 = 1 \qquad a_2 = 2 \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

Den Beweis, dass dies die richtige Folge ist, lassen wir an dieser Stelle weg. Dies ist die wohl bekannteste rekursive Folge, die Folgeglieder werden Fibonacci-Zahlen genannt, nach einem italienischen Mathematiker des 12. Jahrhunderts.

1.2 Eigenschaften

Wir wollen uns nun mit einigen Eigenschaften von Zahlenfolgen beschäftigen. Dies dient zum einem dazu die Folgen zu kategorisieren, einzuordnen. Wir werden dann später sehen wie diese verschiedenen Eigenschaften zusammenhängen, was aus welcher Eigenschaft folgert.

1.2.1 Monotonie

Diese Eigenschaft hat nichts mit der ungangsprachlichen Monotonie (Langeweile) zu tun. Wir kennen schon ein paar Folgen, die sich nach einem bestimmten Muster verhalten.

Beispiel 1.2.1. *Folgende Beispiele haben alle etwas gemeinsam:*

$$(a_n) = n \qquad 1; 2; 3; ...$$
$$(a_n) = -n \qquad -1; -2; -3; ...$$
$$(a_n) = 2^n \qquad 2; 4; 8; 16; ...$$
$$(a_n) = -n^2 \qquad -1; -4; -9; ...$$

Sie sind alle mehr oder weniger stark wachsend oder fallend, im Gegensatz zu

$$(a_n) = (-1)^n \qquad 1; -1; 1; -1; ...$$

Darum wollen wir nun einen Begriff entwickeln, der dieses Verhalten beschreibt

Definition 1.2.2. *Eine Folge $(a_n)_n$ reeller Zahlen heisst:*

1. ***streng monoton wachsend****, wenn für i<j $a_i < a_j$ folgt. D.h. heisst ein kleinerem Index wird ein kleinerer Wert zugeordnet*
2. ***streng monoton fallend****, wenn für i<j $a_i > a_j$ folgt. D.h. heisst ein kleinerem Index wird ein grösserer Wert zugeordnet*

Wir betrachten noch einmal die vorhergehenden Beispiele

Beispiel 1.2.3. *Wir haben betrachtet:*

$$(a_n) = n \qquad 1; 2; 3; ...$$

ist streng monoton wachsend

$$(a_n) = -n \qquad -1; -2; -3; ...$$

ist streng monoton fallend

$$(a_n) = 2^n \qquad 2; 4; 8; 16; ...$$

ist streng monoton wachsend

$$(a_n) = -n^2 \qquad -1; -4; -9; ...$$

ist streng monoton fallend

$$(a_n) = (-1)^n \qquad 1; -1; 1; -1; ...$$

ist weder streng monoton fallend noch streng monoton steigend!

Wir betrachten nun noch eine etwas schwächere Eigenschaft

Definition 1.2.4. *Eine Folge $(a_n)_n$ reeller Zahlen heisst:*

1. ***monoton wachsend****, wenn für i<j $a_i \leq a_j$ folgt. D.h. heisst ein kleinerem Index wird ein kleinerer Wert zugeordnet*
2. ***monoton fallend****, wenn für i<j $a_i \geq a_j$ folgt. D.h. heisst ein kleinerem Index wird ein grösserer Wert zugeordnet*

Es ergibt sich schnell folgende Bemerkung:

Bemerkung 1. *Jede streng monoton wachsende Folge ist auch monoton wachsend!*

Beispiel 1.2.5. *betrachten wir nun wieder*

$$(a_n) = (-1)^n \qquad 1; -1; 1; -1; ...$$

so ist diese Folge auch weder monoton wachsend noch monoton fallend

$$(a_n) = i \qquad i; i; i; i; ...$$

ist für jedes i aus $\mathbb{R}$ monoton wachsend ***und*** *monoton fallend.*
Also sind diese Eigenschaften keine Gegensatz, es gibt also Folgen die monoton wachsend und monoton fallend sind.

1.2.2 Beschränkte Folgen

Wir haben nun monoton wachsende und fallende Folgen untersucht, nun ergibt sich auch die Frage, ob eine Folge immer so weiterwächst oder auch irgendwann einmal 'aufhört' ?

Beispiel 1.2.6 (Paradoxon des Zeno). *Im alten Griechenland vor ca 2500 Jahren formulierte ein Gelehrter folgendes Pardoxon:*
Die griechische Sagengestalt Achilles und eine Schildkröte laufen um die Wette. Achilles läuft wesentlich schneller darum erhält die Schildkröte einen Vorsprung. Das Rennen startet. Achilles erreicht schnell den Startpunkt der Schildkröte, diese ist aber schon voran gekommen und erreicht den Punkt A. Erreicht nun Achilles den Punkt A ist die Schildkröte schon wieder weitergekommen! Sie hat inzwischen den Punkt B erreicht... Also kann Achilles die Schildkröte niemals erreichen.
Wir betrachten nun ein ähnliches Beispiel:
Achilles kann nicht einmal das Ziel erreichen! Wir betrachten seinen Lauf einmal folgendermassen: nach einem Weilchen hat er die Hälfte der Strecke zurückgelegt, nach einem weiterem Weilchen die Hälfte der verbleibenden Strecke usw. In der expliziten Schreibweise sieht das folgendermassen aus

$$\frac{1}{2}; \frac{3}{4}; \frac{7}{8}; \frac{15}{16}; ...$$

Er erreicht niemals die 1 (das Ziel).

Wir wollen nun noch andere Folgen betrachten

Beispiel 1.2.7. *Achilles war tief gekränkt von seiner Niederlage und trat nun gegen eine Schnecke an. Siegesicher machte er eine riesigen Satz und dank seiner göttlichen Kräfte war er schon 10 m weit und schaute zurück. Diesmal war er in Führung und betrachtete die Schnecke. Diese legte in der ersten Minute einem Meter zurück in der zweiten einen halben, da sie von der langen Strecke erschöpft war, in der dritten einen Drittel Meter usw. Achilles legte sich schlafen, denn er meinte, die Schnecke würde ihn nie erreichen?!*
Stimmt dies? Oder überholt ihn die Schnecke schliesslich doch noch? Wir wollen uns diese Folge einmal in expliziter Darstellung anschauen:

$$1; \frac{3}{2}; \frac{11}{6}; \frac{25}{12}; ...$$

Wir werden in einem spteren Kapitel dieses noch einmal genauer betrachten, hier sei nur kurz die Idee formuliert. Die Schnecke berholt ihn tatschlich, egal wie weit sein Vorsprung ist.
Wir wollen uns nun hierzu die Abbildungsdefinition dieser Folge anschauen:

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n}$$

Wir wollen nun einen etwas komplizierten Ansatz benutzen, anstatt des n-ten Folgenglieds a_n betrachten wir nun ein 2^k-tes Folgenglied a_{2^k} , dies ergibt nun mit folgender Klammerung

$$a_{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + ... + \frac{1}{8}) + ... + (\frac{1}{2^{k-1}+1} + ... + \frac{1}{2^k})$$

eine gute Abschätzung, denn es ist nun jede der klammern grösser gleich $\frac{1}{2}$, also folgt

$$a_{2^k} \geq 1 + \frac{k}{2}$$

In unserem Beispiel wollten wir wissen, wann die Schildkröte Achilles überholt, oder anders gesagt, wann a_n grösser als 10 wird. Nun wissen wir, dass $a_{2^k} \geq 1+\frac{k}{2} \geq 10$, wenn $k \geq 18$ ist, also ist $a_n \geq 10$, wenn $n \geq 2^{18}$ ist.

Wir wollen nun aber zum Thema dieses Kapitels zurückkommen

Definition 1.2.8. *Eine reelle Zahlenfolge (a_n) heisst*

1. *nach oben beschränkt, falls eine reelle Zahl M existiert, so dass $a_n \leq M$ für jedes n*
2. *nach unten beschränkt, falls eine reelle Zahl m existiert, so dass $a_n \geq m$ für jedes n*
3. *beschränkt, falls a_n nach oben und unten beschränkt ist.*

Beispiel 1.2.9. *Wir wollen folgende Folgen auf Beschränktheit untersuchen*

1. *$a_n = n$ ist nach unten beschränkt nach oben aber unbeschränkt, denn es ist $0 \leq a_n$. Sei r nun eine beliebige reelle Zahl, ist r kleine gleich 0, so ist schon a_0 grösser. Für r grösser als 0 betrachten wir die natürliche Zahl k für die gilt $k \leq r < k+1$, dann ist $a_{k+1} > r$, also a_n nach oben unbeschränkt.*
2. *$a_n = -n$ ist nach oben durch 0 beschränkt und nach unten unbeschränkt.*
3. *$a_n = \frac{1}{n}$ ist nach oben durch 1 und nach unten durch 0 beschränkt*