Mathematatik Projekt

Eigenständige Erarbeitung des Gaußschen Algorithmus

Fachlehrer Herr Rosanowski
Ausarbeitung Marc Urban, IA52

Der Gaußsche Algorithmus

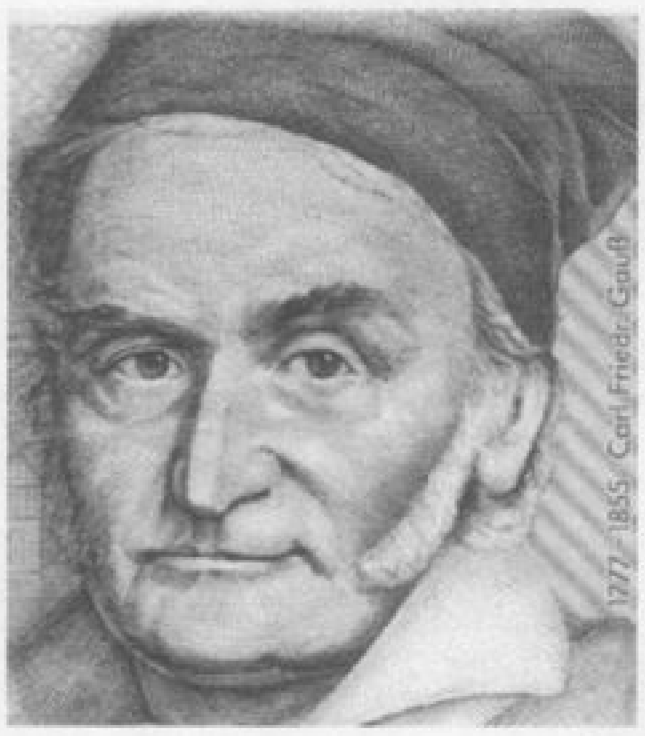
Inhaltsverzeichnis

Der Gaußsche Algorithmus

1. Einleitung

Ziel dieser Projektarbeit ist das eigenständige Erarbeiten und Verstehen eines neuen, im Mathematik Unterricht noch nicht erklärten, Themas. In dieser Projektarbeit erkläre ich den von Carl Friedrich Gauß entwickelten Gaußschen Algorithmus.

1.1 Carl Friedrich Gauß



Johann Carl Friedrich Gauß wurde am 30. April 1777 in Braunschweig geboren und verstarb am 23. Februar 1855 in Göttingen.
Er war Mathematiker, Astronom und Physiker.
Seine wissenschaftlichen Leistungen waren überragend.
Gauß veröffentlichte nur wenige seiner Entdeckungen.
Erst nachdem sein Tagebuch viele Jahre nach seinem Tod gefunden wurde, erhielt man Einblicke in die Tiefgründigkeit seiner Werke. Gauß zierte in heutiger Zeit lange die 10DM Banknote.

1.2 Der Gaußsche Algorithmus

Eine sehr bekannte Entwicklung von Gauß ist der Gaußsche Algorithmus.
Es ist ein Verfahren um lineare Gleichungssysteme zu lösen. Es beruht auf dem Umformen von Gleichungen. Ziel ist es, das Gleichungssystem in eine Stufenform zu bringen, um so die Lösungen einfach ablesen bzw. ausrechnen zu können.
In der Grundform ist dieser Algorithmus allerdings sehr anfällig für Rundungsfehler.
Diese können aber durch leichte Modifikationen wie z.B. durch Pivotisierung vermieden werden. Größtes Anwendungsgebiet des Gaußschen Algorithmus ist die Software Entwicklung. Wird ein Programm entwickelt, welches Gleichungssysteme lösen soll, wird dort dieser Algorithmus implementiert.
In dieser Projektarbeit gehe ich nur auf die Grundform des Algorithmus ohne seine Modifikationen ein.

2. Hauptteil
2.1 Ausgangssituation

Eine denkbare Ausgangssituation wären z.B. 3 Gleichungen, mit 3 Unbekannten. Normalerweise würden wir jetzt eine Matrix aufstellen, und durch die Determinanten die 3 Unbekannten bestimmen.
Das ist allerdings viel Schreibarbeit. Zudem liegt die Grenze bei diesem Verfahren, so wie wir es kennen gelernt haben, bei 3 Gleichungen mit maximal 3 Unbekannten. Eine andere Möglichkeit eine Lösung für die Unbekannten zu erhalten, ist der Gaußsche Algorithmus.

2.2 Ziel des Gaußschen Verfahrens

Ziel des Verfahrens ist, wie oben schon beschrieben, eine möglichst einfache Bestimmung von Unbekannten. Hierbei ist es egal wie viele Unbekannte vorhanden sind. Im weiteren Verlauf gehen wir von 3 Gleichungen, mit 3 Unbekannten aus.
Durch Umformen der Gleichungen in ein Stufensystem ist es letztendlich möglich die Werte der Unbekannten einfach zu bestimmen.
Ein Gleichungssystem in Stufenform liegt vor, wenn bei jeder Gleichung mindestens eine ihrer Variablen in den folgenden Gleichungen nicht mehr vorkommt.
Eine einfache Stufenform wäre z.B.:

$$\begin{aligned} 1a + 1b + 1c &= d \\ 0a + 1b + 1c &= e \\ 0a + 0b + 1c &= f \end{aligned}$$

Hierbei sind a, b, c die Unbekannten und d, e, f sind konstant

Aus dieser Stufenform kann die Lösung jetzt bestimmt werden. Man löst die jeweils letzte Gleichung nach ihrer Unbekannten auf, und setzt nun alle bekannten Werte in die „nächsthöhere" Gleichung ein, welche man dann wieder nach ihrer Variablen auflöst, bis letztendlich alle Unbekannten bekannt sind.

2.3 Erklärung des Algorithmus anhand einer Beispielrechnung

Folgende Gleichungen sind gegeben

$$\begin{array}{ll} \textbf{I)} & 4a + 2b + c = -3 \\ \textbf{II)} & 9a + 3b + c = -20 \\ \textbf{III)} & a + b + c = 2 \end{array}$$

Daraus ergibt sich die folgende Matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & -3 \\ 9 & 3 & 1 & -20 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Ziel ist es, die markierten Elemente der Matrix auf zu 0 setzen um so die Gleichungen in die Stufenform zu bringen

Zuerst wird die erste Zeile durch 4 dividiert um das erste Element der ersten Zeile auf den Wert 1 zu setzen. Die restlichen Zeilen bleiben wie sie sind.

Danach sieht unser Gleichungssystem so aus:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 9 & 3 & 1 & -20 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Der Gaußsche Algorithmus

Unser Ziel ist es immer noch das Gleichungssystem in Stufenform zu bringen.
Wir addieren zur zweiten Zeile unseres Gleichungssystems das -9 fache der ersten Zeile

$$-9 * \left(1 + \frac{2}{4} + \frac{1}{4}\right) = -9 * \left(-\frac{3}{4}\right)$$

$$-9 - \frac{18}{4} - \frac{9}{4} = \frac{27}{4}$$

Diese Gleichung addieren wir nun zur zweiten Zeile unseres Gleichungssystems.
Die restlichen Zeilen werden nicht verändert.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{5}{4} & -\frac{53}{4} \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Damit erfüllt die erste und zweite Zeile schon mal das Schema der Stufenform.

Bearbeiten wir nun die dritte Zeile.
Wir beginnen mit dem ersten Element der dritten Zeile,
indem wir zur dritten Zeile das -1 fache der ersten Zeile addieren:

$$-1 * \left(1 + \frac{2}{4} + \frac{1}{4}\right) = -1 * \left(-\frac{3}{4}\right)$$

$$-1 - \frac{2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Der Gaußsche Algorithmus

Diese Gleichung addieren wir zur dritten Zeile und erhalten dann folgendes System:

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{5}{4} & -\frac{53}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{11}{4} \end{array}\right.$$

Wir nähern uns unserem Ziel. Um die Stufenform zu vollenden, muss nur noch das zweite Element der dritten Zeile auf 0 gebracht werden.

Dazu bringen wir das zweite Element der zweiten Zeile auf den Wert 1, indem wir diese Zeile durch $-\frac{3}{2}$ teilen. (Also dem Kehrwert $-\frac{2}{3}$ multiplizieren)

$$-\frac{2}{3} * (0 - \frac{3}{2} - \frac{5}{4}) = -\frac{2}{3} * (-\frac{53}{4})$$

$$0 + 1 + \frac{5}{6} = \frac{53}{6}$$

Eingesetzt in unser Gleichungssystem sieht das nun so aus:

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & \frac{5}{6} & \frac{53}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{11}{4} \end{array}\right.$$

Der Gaußsche Algorithmus

Es folgt der vorerst letzte Schritt um unsere Stufenform aufzubauen.
Wir wollen das zweite Element der dritten Zeile auf 0 setzen.
Also addieren wir zur dritten Zeile das – ½ fache der zweiten Zeile

$$-\frac{1}{2} * (0 + 1 + \frac{5}{6}) = -\frac{1}{2} * \frac{53}{6}$$

$$0 - \frac{1}{2} - \frac{5}{12} = -\frac{53}{12}$$

Diese Gleichung addieren wir zur dritten Zeile und erhalten dann folgendes System:

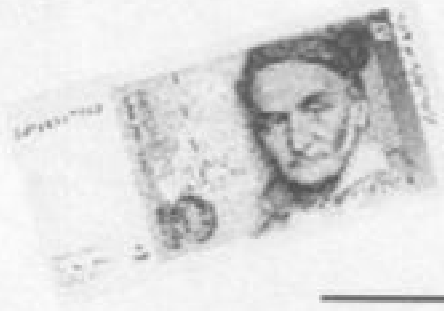
$$\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} & & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & \frac{5}{6} & & \frac{53}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & & -\frac{5}{3} \end{array}$$

Man erkennt nun, dass bei jeder Gleichung eine ihrer Unbekannten in den folgenden Gleichungen nicht mehr vorkommt. Unsere Stufenform ist also vollendet.
Wir können nun wieder unsere Gleichungen daraus bilden.

I $a + \frac{2}{4}b + \frac{1}{4}c = -\frac{3}{4}$

II $b + \frac{5}{6}c = \frac{53}{6}$

III $\frac{1}{3}c = -\frac{5}{3}$



Der Gaußsche Algorithmus

Jetzt können die Gleichungen nach der Reihe nach den Unbekannten aufgelöst werden, und die Lösungen eingesetzt werden.

III)

$$\frac{1}{3}c = -\frac{5}{3} \qquad |* \frac{3}{1}$$

$$c = -\frac{15}{3}$$

$$\underline{\underline{c = -5}}$$

II)

$$b + \frac{5}{6}c = \frac{53}{6}$$

$$b + \frac{5}{6} * (-5) = \frac{53}{6}$$

$$b - \frac{25}{6} = \frac{53}{6} \qquad |+ \frac{25}{6}$$

$$\underline{\underline{b = 13}}$$

I)

$$a + \frac{2}{4}b + \frac{1}{4}c = -\frac{3}{4}$$

$$a + \frac{2}{4} * 13 + \frac{1}{4} * (-5) = -\frac{3}{4}$$

$$a + \frac{26}{4} - \frac{5}{4} = -\frac{3}{4}$$

$$a + \frac{21}{4} = -\frac{3}{4} \qquad |- \frac{21}{4}$$

$$\underline{\underline{a = -6}}$$

Der Gaußsche Algorithmus

2.4 Zusammenfassung des Lösungsweges

Sehr gut wird das komplette Schema des Gaußschen Algorithmus anhand der nebenstehenden Grafik klar. In der 1. Matrix sehen wir die Ausgangssituation unserer Gleichungen. In diesem Beispiel hat das erste Element der ersten Zeile und das zweite Element der zweiten Zeile schon den Wert 1 sodass eine Division entfällt. In der 2. Matrix wurde die zweite Zeile schon in Stufenform gebracht.
Die 3. und letzte Matrix zeigt unsere fertige Stufenform.
Durch Umstellen und einsetzen erhalten wir dann unsere Lösungen für die Unbekannten.

	1	2	3	2	*(-1)	*(-3)
1.	1	1	1	2	+	
	3	3	1	0		+
	1	2	3	2		
2.		-1	-2	0	*(-3)	
		-3	-8	-6	+	
	1	2	3	2		
3.		-1	-2	0		
			-2	-6		

3. Schluss

3.1 Mein Fazit

Ich finde, dieses Lösungssystem ziemlich fehleranfällig. Durch das Multiplizieren und Addieren verschiedener Gleichungen schleichen sich schnell Fehler ein. Vor allem beim rechnen mit Brüchen ist hier besondere Konzentration geboten. Wenn man dieses System intensiv anwendet und übt ist es sicherlich möglich schnell und effektiv aus Gleichungen mit mehreren Unbekannten die Lösungen zu erhalten.
Ich bevorzuge allerdings weiterhin das bekannte Matrix System mit Determinanten.
Es ist vielleicht mehr Schreibarbeit, allerdings fühle ich mich mit diesem Verfahren weitaus sicherer.

Im Vergleich zum bekannten Matrix System mit Determinanten liegt der Vorteil beim Gaußschen Algorithmus ganz klar in der Geschwindigkeit. Zudem lassen sich mit diesem Verfahren Gleichungssysteme mit mehr als 3 Unbekannten lösen.

4. Anhang

4.1 Quellenverzeichnis

Informationen:
Internet: www.wikipedia.de Suchwort „Gaußsches Eliminationsverfahren“
Buch: Mathematik zur Fachhochschulreife Technik, Cornelsen Verlag

Verwendete Bilder:
Bilder von Gauß: http://images.google.de Suchwort „Gauß“
Schema Seite 7: www.wikipedia.de Suchwort „Gaußsches Eliminationsverfahren“

4.2 Selbstständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, dass die vorliegende Projektarbeit in allen Teilen selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel (einschließlich elektronischer Medien und Online Quellen) benutzt habe.
Alle Informationsquellen habe ich im oben stehenden Quellenverzeichnis aufgeführt.

M. Urban
Marc Urban, IA52