Univ.-Professor Dr. Ralf Runde

Guido Schultefrankenfeld

Rechnen mit dem Summenzeichen Σ

In der Mathematik und Statistik verwendet man zur verkürzten Darstellung häufig auftretender Rechenoperationen bestimmte Symbole. Eine besondere Bedeutung kommt dabei dem Summenzeichen Σ zu. Der Vorteil in der Anwendung dieses Symbols besteht darin, dass man mit ihm umfangreiche Summenausdrücke in eine kurze und übersichtliche Form überführen und bestimmte Rechenoperationen ausführen kann, ohne die Summen selbst zu kennen. So kann man zum Beispiel die Summe der reellen Zahlen $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$ abkürzen in der Form

$$a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n = \sum_{i=m}^{n} a_i, \quad (i, m, n \in \mathbb{N}, \quad m \leq n). \tag{1}$$

Der Ausdruck in Gleichung (1) wird wie folgt gesprochen: Summe der a_i von $i = m$ bis n. Dabei heißen i Laufindex, m unterer und n oberer Summationsindex. Der Ausdruck $\sum\limits_{i=m}^{n} a_i$ stellt also eine Anweisung dar, die Summe der reellen Zahlen a_i zu bilden, wobei i alle ganze Zahlen von m bis n durchläuft. Natürlich kann man statt der hier verwendeten Indices i, m, n beliebige andere Buchstaben verwenden.

Der obere Summationsindex muss dabei nicht endlich sein

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i. \tag{2}$$

Ungerade Zahlen kann man darstellen durch den Ausdruck $(2i - 1)$, gerade Zahlen durch $(2i)$ und einen Vorzeichenwechsel durch die Formel $(-1)^{i+1}$. Es ergibt sich also beispielsweise

$$1 - 3 + 5 - 7 + 9 - \ldots - 99 = \sum_{i=1}^{50} (-1)^{i+1} \cdot (2i - 1) \quad \text{und} \tag{3}$$

$$2 - 4 + 6 - \ldots - 100 = \sum_{i=1}^{50} (-1)^{i+1} \cdot (2i). \tag{4}$$

Nützlich sind die folgenden Beziehungen:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}. \tag{7}$$

Es gilt insbesondere

Satz 1. $$\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}, \qquad a \neq 1 \quad \text{(endliche geometrische Reihe)}$$

und

Satz 2. $$\sum_{i=0}^{\infty} a^i = \frac{1}{1-a}, \qquad 0 < a < 1 \quad \text{(unendliche geometrische Reihe).}$$

Nachfolgend werden die wichtigsten Rechenregeln für den Umgang mit dem Summenzeichen eingeführt.

Satz 3. $$\sum_{i=1}^{n} c = n \cdot c \quad (c = \text{const.}).$$

Beweis:

$$\sum_{i=1}^{n} c = \underbrace{c + c + \ldots + c}_{\text{n-mal}} = nc.$$

Satz 4. $$\sum_{i=1}^{n} c \cdot a_i = c \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Beweis:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} c \cdot a_i &= c \cdot a_1 + c \cdot a_2 + c \cdot a_3 + \ldots + c \cdot a_n \\ &= c \cdot (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = c \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i.\end{aligned}$$

Beispiel:

$$a_1 = 2; \quad a_2 = 4; \quad a_3 = 6; \quad a_4 = 9; \quad c = 2.$$

$$\sum_{i=1}^{4} 2a_i = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 9 = 2 \cdot (2 + 4 + 6 + 9) = 2 \cdot (21) = 2 \cdot \sum_{i=1}^{4} a_i.$$

Satz 5. $$\sum_{i=m}^{n} c = (n - m + 1) \cdot c.$$

Beispiel:

$$\sum_{i=5}^{10} 3 = (10 - 5 + 1) = 6 \cdot 3 = 18.$$

Satz 6. $$\sum_{i=1}^{n} (a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i.$$

Beweis:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) &= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_n + b_n) \\ &= (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i.\end{aligned}$$

Beispiel:

$$a_1 = 3; \quad a_2 = 5; \quad a_3 = 6; \quad b_1 = 5; \quad b_2 = -2; \quad b_3 = 4.$$

$$\sum_{i=1}^{3} (a_i + b_i) = 21 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{3} a_i + \sum_{i=1}^{3} b_i = 14 + 7 = 21.$$

Im allgemeinen gilt für die Summation von Produkten:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i \neq \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i \quad (n > 1). \tag{8}$$

Beispiel:

$$a_1 = 3; \quad a_2 = 5; \quad a_3 = 6; \quad b_1 = 5; \quad b_2 = -2; \quad b_3 = 4.$$

$$3 \cdot 5 + 5 \cdot (-2) + 6 \cdot 4 = 29 \neq 3 \cdot 5 \cdot 6 + 5 \cdot (-2) \cdot 4 = 50.$$

Achtung!

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \neq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right)^2, \quad \text{da} \tag{9}$$

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) \neq (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2.$$

Beispiel:

$$a_1 = 3; \quad a_2 = 5; \quad a_3 = 6.$$

$$(3 + 5 + 6)^2 = 14^2 = 196 \neq 3^2 + 5^2 + 6^2 = 70.$$

Achtung!

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i - c) \neq \sum_{i=1}^{n} a_i - c, \quad \text{da} \tag{10}$$

$$(a_1 - c) + (a_2 - c) + \ldots + (a_n - c) \neq (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) - c.$$

Beispiel:

$$a_1 = 3; \quad a_2 = 5; \quad a_3 = 6; \quad c = 5.$$

$$3 - 5 + 5 - 5 + 6 - 5 = -1 \neq 3 + 5 + 6 - 5 = 9.$$

Satz 7. $$\sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \quad (m < n).$$

Beweis:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i &= (a_1 + \ldots + a_{m-1} + a_m) + (a_{m+1} + \ldots + a_{n-1} + a_n) \\ &= (a_1 + \ldots + a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i.\end{aligned}$$

Es kann aber auch vorkommen, dass sich die untere Summationsgrenze der zweiten Summe nicht unmittelbar an die obere Summationsgrenze der ersten Summe anschließt. In diesem Falle gilt:

Satz 8. $$\sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=k}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=k}^{m} a_i, \quad (k < m < n), \quad \text{bzw.}$$

Satz 9. $$\sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=k}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=m+1}^{k-1} a_i, \quad (m < k < n).$$

In vielen praktischen Aufgabenstellungen treten Anordnungen von Elementen in folgender Form auf:

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}, \tag{11}$$

wobei $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ eine Matrix der Ordnung oder Dimension $(n \times m)$ (gesprochen: n kreuz m) ist. Es lassen sich sogenannte Doppelsummen bilden, indem man über beide Indices i und j summiert.

Man bezeichnet die folgende Summe

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} &= \underbrace{\sum_{j=1}^{m} a_{1j}}_{i=1} + \underbrace{\sum_{j=1}^{m} a_{2j}}_{i=2} + \ldots + \underbrace{\sum_{j=1}^{m} a_{nj}}_{i=n} \\ &= (a_{11} + \ldots + a_{1m}) + \ldots + (a_{n1} + \ldots + a_{nm}) \end{aligned} \tag{12}$$

als Doppelsumme.

Beispiel: Ein Betrieb verbraucht acht unterschiedliche Rohstoffe ($i = 1, \ldots, 8$) in den ersten vier Monaten ($j = 1, \ldots, 4$) eines Jahres. Der Verbrauch an Rohstoffen wird in Geldeinheiten pro Monat (a_{ij}) gemessen.

Rohstoff \ Monat	Januar	Februar	März	April	$\sum$
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	$\sum_{j=1}^{4} a_{1j}$
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	$\sum_{j=1}^{4} a_{2j}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
8	a_{81}	a_{82}	a_{83}	a_{84}	$\sum_{j=1}^{4} a_{8j}$
$\sum$	$\sum_{i=1}^{8} a_{i1}$	$\sum_{i=1}^{8} a_{i2}$	$\ldots$	$\sum_{i=1}^{8} a_{i4}$	$\sum_{i=1}^{8} \sum_{j=1}^{4} a_{ij}$

Dabei bezeichnen die Zeilensummen den Verbrauch des Rohstoffes i in den Monaten Januar bis April und die Spaltensummen den Verbrauch aller Rohstoffe im Monat j. Der Gesamtverbrauch wird durch den Ausdruck $\sum_{i=1}^{8} \sum_{j=1}^{4} a_{ij}$ erfasst. Für Doppelsummen gelten die zu einfachen Summen analogen Rechenregeln.
Es gilt insbesondere folgender Satz:

Satz 10.
$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}.$$

Es ist also gleichgültig, ob zuerst über die Indices i oder j summiert wird.