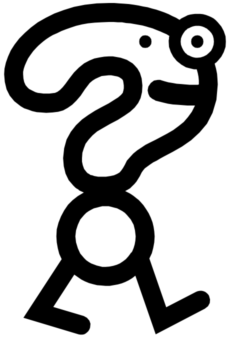
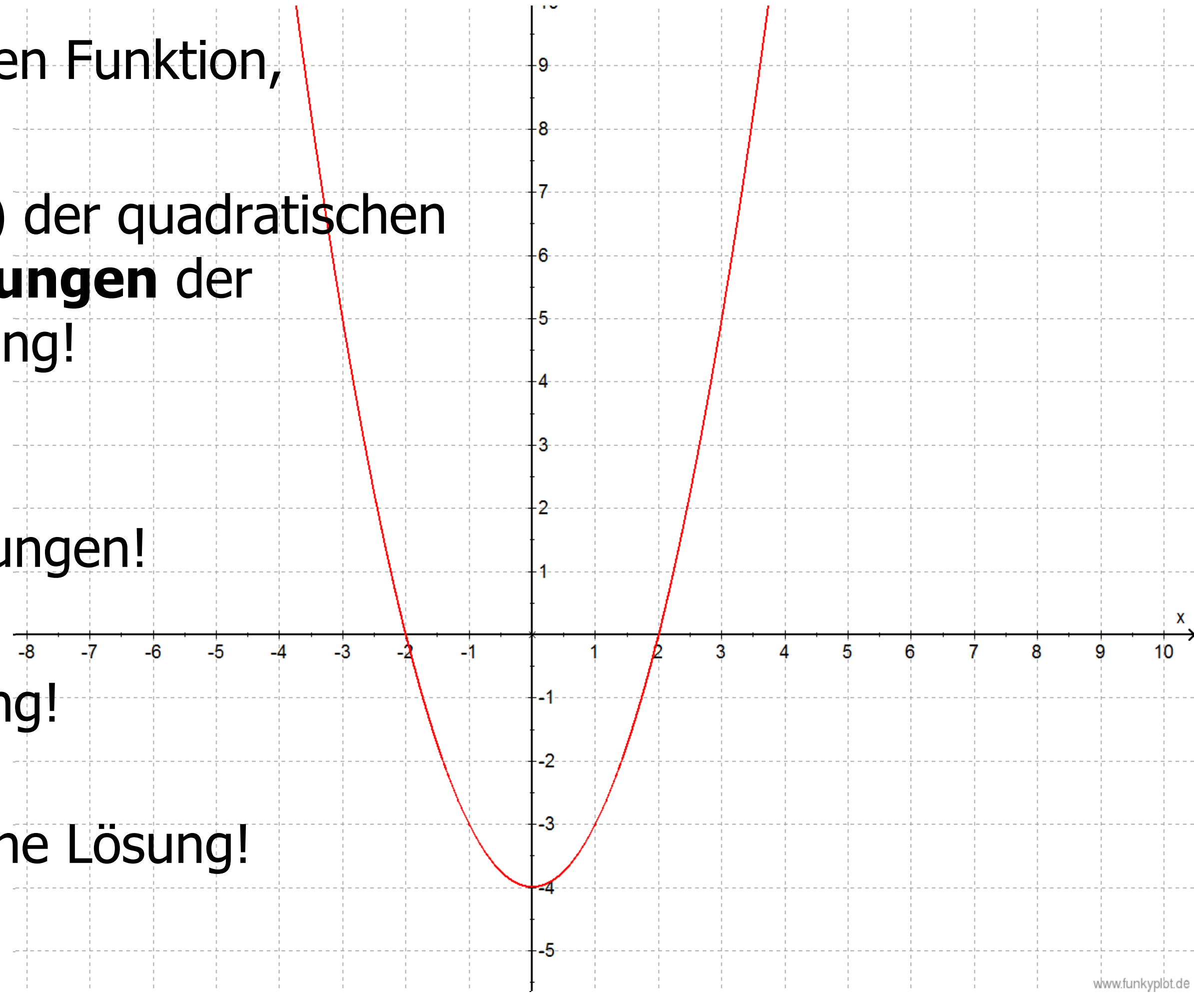
$$ax^2 + bx + c = 0$$



Woher kommt eine quadratische Gleichung?

- von einer quadratischen Funktion,
  z. B. $\mathbf{y = x^2 - 4}$
- die **Nullstellen** ($y=0$) der quadratischen Funktion sind die **Lösungen** der quadratischen Gleichung!
  $\Rightarrow 0 = x^2 - 4$
- $\mathbf{y = x^2 - 4}$
  2 Nullstellen $\Leftrightarrow$ 2 Lösungen!
- $\mathbf{y = x^2}$
  1 Nullstelle $\Leftrightarrow$ 1 Lösung!
- $\mathbf{y = x^2 + 2}$
  keine Nullstelle $\Leftrightarrow$ keine Lösung!



Wie kommt man zu zwei Lösungen?

Wiederholung: **Quadratwurzel**

Wikipedia:

Die **Quadratwurzel** einer positiven Zahl ist jene (eindeutig bestimmte) **positive** Zahl, deren Quadrat gleich der gegebenen Zahl ist. …

Dabei wird die Zahl beziehungsweise der Term unter der Wurzel als *Radikand* bezeichnet.

Wie kommt man zu zwei Lösungen?

- Beispiel 1: $\sqrt{9} = 3$
- Beispiel 2: $\sqrt{a^2} = a\,?$
  was ist, wenn a < 0 ist?
  Der Radikand ist positiv, aber das Ergebnis negativ! Widerspruch!
- Beispiel 3: a = -5; $\sqrt{a^2} = -a \quad \Leftrightarrow \sqrt{25} = -(-5) = 5$
  also:

$$\sqrt{a^2} = \left\{ \begin{array}{c} a, wenn\, a > 0 \\ 0, wenn\ a = 0 \\ -a, wenn\ a < 0 \end{array} \right\} = |a|$$

Lösungsverfahren 1

(1) Lösung der reinquadratischen Gleichung
$0 = x^2 - 4 \quad |$ +4 und Seiten tauschen

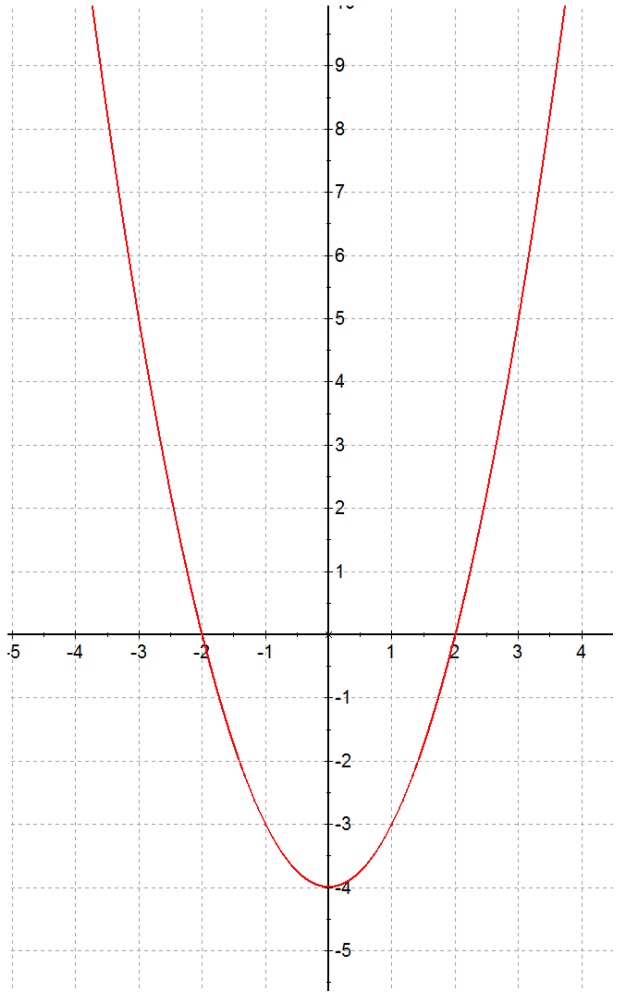
(2) $x^2 = 4 \quad | \sqrt{}$

(3) $|x| = 2$

(4) 1. Fall: $x > 0$: $x=2$ oder

(5) 2. Fall: $x < 0$: $-x=2 \Rightarrow x=-2$

(6) Kurzschreibweise: $x_{1/2} = \pm 2$



Lösungsverfahren 2

(1) **Wer mag kein Wurzelziehen?**
$0 = x^2 - 4$ sieht irgendwie bekannt aus…

(2) 3. Binomische Formel:
$a^2 - b^2 = (a + b)*(a - b)$

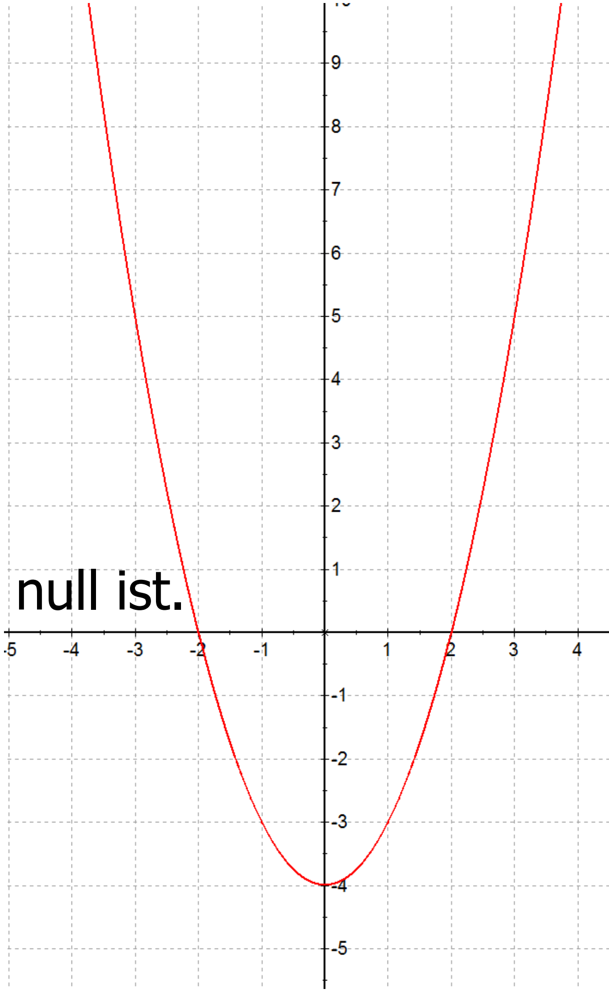
(3) also hier:
$x^2 - 2^2 = (x + 2)*(x - 2) = 0$

(4) Regel:
ein Produkt ist null, wenn einer der Faktoren null ist.

(5) 1. Fall: $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$ oder

(6) 2. Fall: $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

(7) Kurzschreibweise: $x_{1/2} = \pm 2$



Lösungsverfahren 3

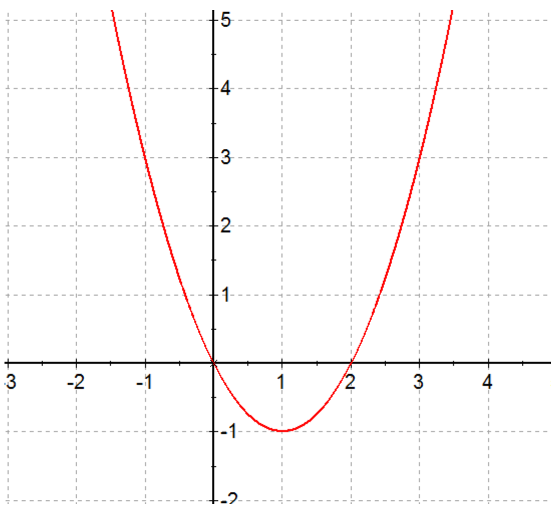
(1) Lösung der speziellen quadratischen Gleichung
$0 = x^2 - 2x$ (c=0, nur Summanden mit x!)

(2) $0 = x*(x - 2)$ | x ausklammern!

(3) ein Produkt ist null, wenn …

(4) 1. Fall: $x = 0$ oder

(5) 2. Fall: $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$



Lösungsverfahren 4a

(1) Lösung der allgemeinen quadratischen Gleichung
$ax^2 + bx + c = 0$; $a,b,c \in \Re$; $a \neq 0$

(2) besser mit Zahlen:
$2x^2 - 4x - 6 = 0 \quad | :2$ (Normalform herstellen)

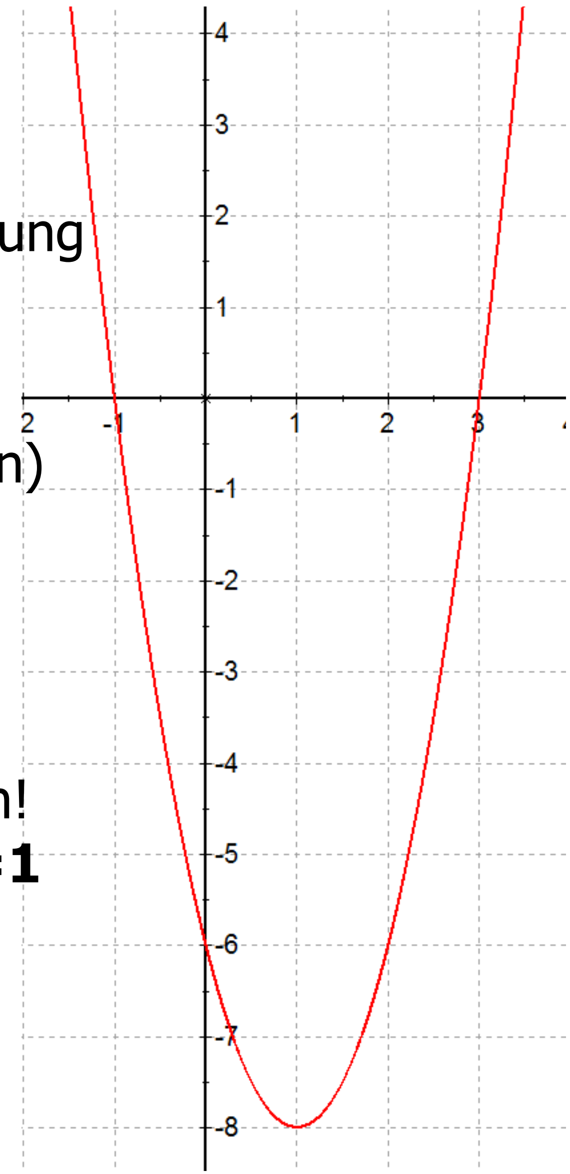
(3) $x^2 - 2x - 3 = 0$; schön wäre…

(4) $a^2 \pm 2ab + b^2 = z$ (Zahl)
$(a \pm b)^2 = z \mid \sqrt{}$ usw.

(5) also: „**quadratische Ergänzung**" **b²** suchen!
aus (3) und (4): $x=a \Rightarrow 2b=2 \Rightarrow b=1 \Rightarrow \mathbf{b^2=1}$
b ist die Hälfte der Beizahl von x!

(6) $(x^2 - 2x\ \mathbf{+1}) - 3 = \mathbf{+1} \quad | +3$

(7) $(x^2 - 2x\ +1) = 4 \quad \Rightarrow$



Lösungsverfahren 4b

(1) $(x^2 - 2x + 1) = 4$

(2) $(x - 1)^2 = 4 \quad | \sqrt{}$

(3) $\pm (x - 1) = 2$

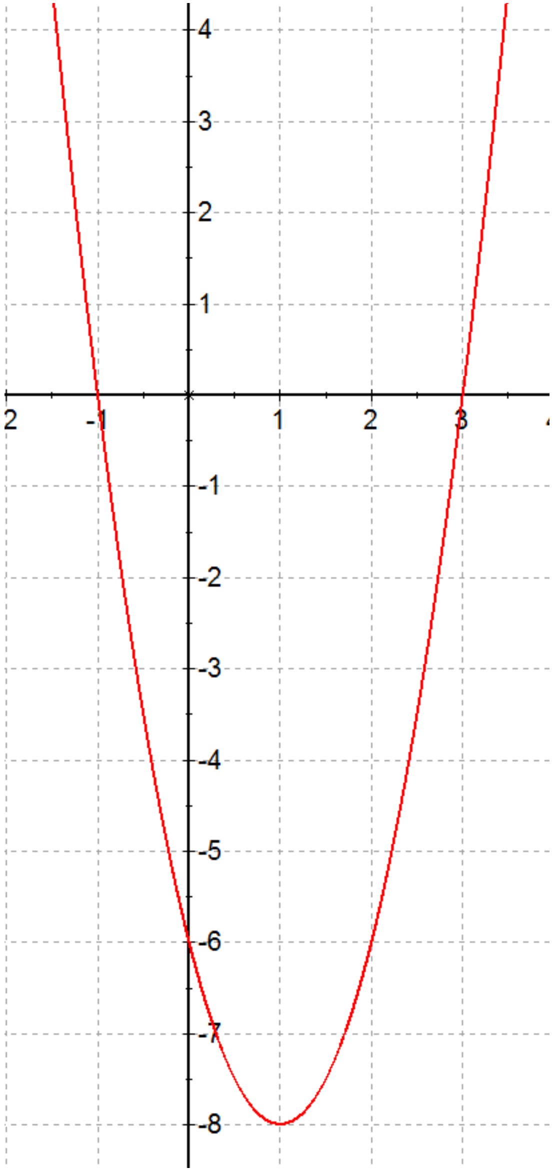
(4) 1. Fall: $+(x - 1) = 2$

$\mathbf{x = 3}$ oder

(5) 2. Fall: $-(x - 1) = 2 \quad | *(-1)$

$x - 1 = -2 \quad | +1$

$\mathbf{x = -1}$



Lösungsverfahren 5a

(1) Herleitung der **Lösungsformel** für die Normalform
$x^2 + px + q = 0$; **b** = p/2 ⇒ **b²** = (p/2)² (quadratische Ergänzung)

(2) $$\Rightarrow \quad x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = +\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

(3) $$\Rightarrow \quad \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = +\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \qquad | \sqrt{}$$

(4) $$\Rightarrow \quad \pm\left(x + \frac{p}{2}\right) = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

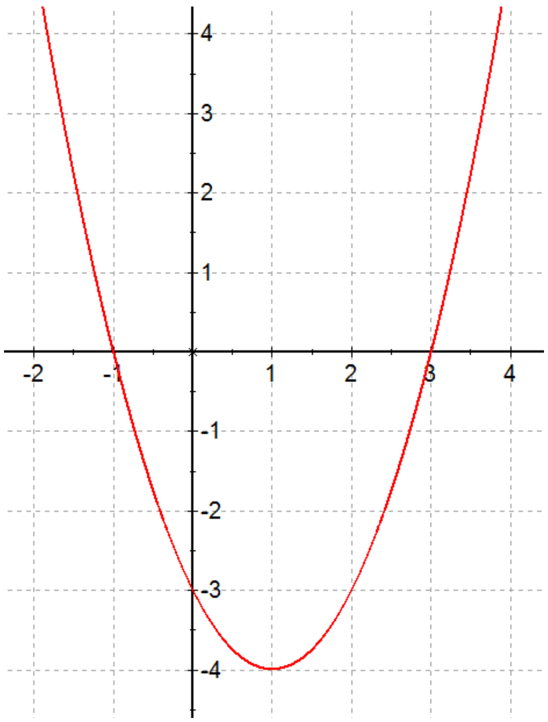
(5) $$\Rightarrow \text{1. Fall: } +\left(x + \frac{p}{2}\right) = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \Rightarrow \boxed{x = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$$

(6) $$\Rightarrow \text{2. Fall: } -\left(x + \frac{p}{2}\right) = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \Rightarrow \boxed{x = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$$

Lösungsverfahren 5b

Kurzschreibweise der **Lösungsformel** für die Normalform **$x^2 + px + q = 0$**

$$\boxed{x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$$



Beispiel:

$x^2 - 2x - 3 = 0$ | $p=-2$; $q=-3$

$$x_{1/2} = -\frac{-2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 - (-3)}$$

$$x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm 2 \quad \Rightarrow x_1 = 1+2 = 3 \text{ oder } x_2 = 1-2 = -1$$

Zusammenfassung

(1) reinquadratische Gleichung $\mathbf{ax^2 + c = 0}$
$\Rightarrow$ nach x^2 umstellen und Wurzelziehen; es existieren Lösungen, wenn $-c/a > 0$ ist.

(2) spezielle quadratische Gleichung $\mathbf{ax^2 + bx = 0}$
$\Rightarrow$ Ausklammern von x ist möglich; eine von zwei Lösungen ist immer $x=0$

(3) allgemeine quadratische Gleichung $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$
$\Rightarrow$ Normalform herstellen, indem durch a dividiert wird
$\Rightarrow$ $x^2 + px + q = 0$
$\Rightarrow$ Lösung durch quadratische Ergänzung $\mathbf{b^2=(p/2)^2}$
$\Rightarrow$ oder durch die Lösungsformel

$$\boxed{x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$$

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit…