Lösen LGS

Gaußscher Algorithmus

Inhalt

- Grundidee
- Koeffizientenmatrix nach der Umformung
- Beispiel
- Vorteil des Verfahrens
- Quellen

Grundidee

- Anwendung Äquivalenter Umformungen auf die Gleichungen des LGS, sodass dieses einfacher lösbar wird
- Äquivalente Umformungen sind
  - Vertauschen 2er Glg. Untereinander
  - Multiplikation von einer Glg. des Systems mit einer Reellen Zahl =/= 0
  - Addition eines beliebigen vielfachen einer Glg. Des Systems zu einer anderen Glg. des Systems
- Mit Hilfe dieser Umformungen kann die Koeffizientenmatrix des LGS in folgende Form gebracht werden

Koeffiezientenmatrix nach Umformung

x	y	z	Ergebnis
a1	b1	c1	d1
0	b2	c2	d2
0	0	c3	d3

Beispiel

I) $2x + 3y - z = 1$

II) $x + 3y + z = 2$

III) $-x - y + 2z = 2$

Damit lautet die Koeffizientenmatrix:

$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 2 \end{array}$$

Beispiel

Schritt 1:

Anwendung der Umformung 2 (Multiplikation), sodass nach Addition (3) in der ersten Spalte ALLE Koeffizienten bis auf den der ersten Zeile 0 werden.

$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ | \cdot (-2) \\ | \cdot 2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 2 & 3 & -1 & 1 \\ -2 & -6 & -2 & -4 \\ -2 & -2 & 4 & 4 \end{array}$$

Beispiel

x	y	z	
2	3	-1	1
0	-3	-3	-3
0	1	3	5

Zeile 2: | Summe aus Zeile 1 + Zeile 2 des Vorgängers
Zeile 3: | Summe aus Zeile 1 + Zeile 3 des Vorgängers

Wiederhole dies für ~~rot~~ markierte Teilmatrix. Ergebnis:

x	y	z	
2	3	-1	1
0	-3	-3	-3
0	0	6	12

Beispiel

Schritt 2:

Die Variable z kann man aus der 3ten Glg. unmittelbar bestimmt werden, weil:

Glg 3: $6z = 12 \quad | :6$

$z = 2$

Dieses Ergebnis kann jetzt in Glg. 2 eingesetzt werden:

Glg 2: $-3y - 3z = -3 \quad | \text{ z einsetzen}$

$-3y - 3 \cdot 2 = -3$

$-3y - 6 = -3 \quad | +6$

$-3y = 3 \quad | :(-3$

$y = -1$

Beispiel

Dieses Ergebnis kann jetzt in Glg. 1 eingsetzt werden:

Glg 1: $2x + 3y - z = 1 \quad | \; z, y$ einsetzen

$$2x + 3 \cdot (-1) - 2 = 1$$

$$2x - 3 - 2 = 1 \quad | +5$$

$$2x = 6 \quad | :2$$

$$x = 3$$

Vorteil des Verfahrens

- Der Vorteil des Verfahrens liegt darin, dass es unter Verwendung der ursprünglichen Matrix [Array] direkt programmiert werden kann
- Das ist insbesondere bei großen LGS ein Speicherplatzvorteil
- Auch Schritt 2 (Rückwärtseinsetzen) kann auf der ursprünglichen Matrix durchgeführt werden.
- Dies hat den Vorteil, dass die Lösung des LGS dann in der rechten Spalte steht und direkt weiterverwendet werden kann. Kein 2tes Array notwendig

Quellen

- http://www.frustfrei-lernen.de/mathematik/matrix-gleichungssysteme.html
- Bronstein - Semendjajew Taschenbuch der Mathematik