MUSTERLÖSUNG

$f(x) = e^x\,(x^2 - 4)$

1. **Definitionsbereich**

$D = \mathbb{R}$

2. **Nullstellen**

$f(x) = 0$

Satz vom Nullprodukt:

$F_1 = e^x$

$F_2 = x^2 - 4$

$F_1 = 0$ ist nicht lösbar

$F_2 = 0$

$0 = x^2 - 4 \qquad |+4$

$4 = x^2 \qquad |\sqrt{}$

$\pm 2 = x$

$N_{S1} = (-2|0)$

$N_{S2} = (2|0)$

3. **Verhalten im Unendlichen**

$\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)) = \lim\limits_{x\to\infty}(e^x(x^2-4))$

$= \infty(\infty^2 - 4) = \infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)) = \lim\limits_{x\to-\infty}(e^x(x^2-4))$

$= e^{-\infty}\,(-\infty^2 - 4)$

$= \frac{1}{\infty}\,(-\infty^2 - 4)$

$= 0\,(-\infty^2 - 4) = 0$

e^x läuft schneller gegen 0

4. **Ableitung**

$f'(x) = v'(x)\cdot u(x) + v(x)\cdot u'(x)$

$f(x) = e^x(x^2 - 4)$

$f'(x) = e^x(x^2 - 4) + 2x \cdot e^x$

$\quad = e^x(x^2 + 2x - 4)$

$f''(x) = e^x(x^2 + 2x - 4) + e^x(2x + 2)$

$\quad = e^x(x^2 + 4x - 2)$

5. **Extrema**

$f(x) = e^x(x^2 - 4)$

$f'(x) = e^x(x^2 + 2x - 4)$

$f''(x) = e^x(x^2 + 4x - 2)$

Notwendige Bedingung:
$f'(x) = 0$

Satz vom Nullprodukt:

$F_1 = e^x$

$F_2 = x^2 - 4$

$F_1 = 0$ ist nicht lösbar

$F_2 = 0$

$0 = x^2 + 2x - 4$

$x^2 + 2x - 4 = 0 \qquad |PQ$

$-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

$-\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 + 4}$

$x_1 = 1{,}236$

$x_2 = -3{,}236$

Hinreichende Bedingung:
$f(x) = 0$

Min/Max bestimmen:
$f''(x_1) = e^{1,236}(1,236^2 + 4 \cdot 1,236 - 2)$
$f''(x_2) = e^{-3,236}(-3,236^2 + 4 \cdot -3,236 - 2)$

$f''(x_1) = 15,39 \quad > \quad 0$ → Minimum
$f''(x_2) = -0,99 \quad < \quad 0$ → Maximum

6. **Wendestellen**

$f(x) = e^x(x^2 - 4)$

$f'(x) = e^x(x^2 + 2x - 4)$

$f''(x) = e^x(x^2 + 4x - 2)$

Notwendige Bedingung:
$f''(x) = 0$

$0 = e^x(x^2 + 4x - 2)$

$e^x = 0$

$x^2 + 4x - 2 = 0 \qquad |PQ$

$$-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$-\frac{4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 + 2}$$

$x_1 = 0,449$

$x_2 = -4,449$

Hinreichende Bedingung:
$f(x) = 0$

Min/Max bestimmen:
$f''(x_1) = e^{0,449}(0,449^2 + 4 \cdot 0,449 - 2)$
$f''(x_2) = e^{-4,449}(-4,449^2 + 4 \cdot -4,449 - 2)$

$f''(x_1) = -0,003 \quad < \quad 0$ → Maximum
$f''(x_2) = -0,462 \quad < \quad 0$ → Maximum