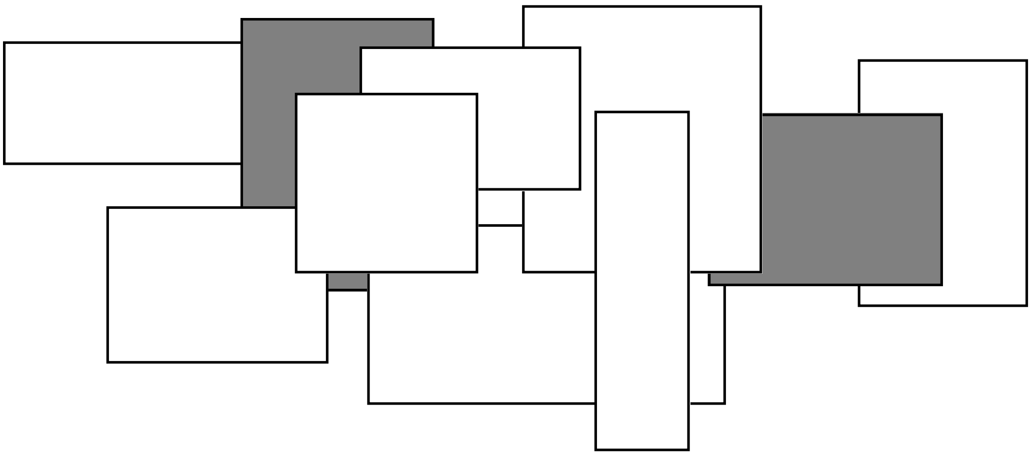
ETH Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Institut für Verhaltenswissenschaft
Departement Mathematik

Quadratische



Gleichungen

Ein Leitprogramm in Mathematik

Verfasst von Marco Bettinaglio

Erstellt unter Mithilfe von Urs Kirchgraber
aufgrund von Vorarbeiten von Michel Andenmatten
Peter Gebauer, Giovanni Gentile, Ueli Manz
und Kathrin Anne Meier

Herausgegeben durch U. Kirchgraber und W. Hartmann

ETH-Leitprogramm „Quadratische Gleichungen“

Version Juni 1995

Stufe, Schulbereich

Gymnasium, Berufsschule

Fachliche Vorkenntnisse

Auflösen von linearen Gleichungen mit einer Unbekannten
Quadratzahlen und Wurzeln

Bearbeitungsdauer

8 bis 12 Lektionen, je nach Schultypus und mathematischen Fähigkeiten

Bezugsquelle

Prof. Dr. U. Kirchgraber
Departement Mathematik
ETH Zentrum
8092 Zürich

Telefon 01 - 632 34 51 (vormittags)
Telefax 01 - 632 10 85

Die *ETH-Leitprogramme* sind ein Gemeinschaftsprojekt von Karl Frey und Angela Frey-Eiling (Initiatoren), Walter Caprez (Chemie), Hans Peter Dreyer (Physik), Werner Hartmann (Informatik), Urs Kirchgraber (Mathematik), Hansmartin Ryser (Biologie), Jörg Roth (Geographie), zusammen mit den Autorinnen und Autoren.

Dieses Projekt wurde durch die ETH Zürich finanziell unterstützt.

Inhaltsverzeichnis

Einführung

Worum geht es?

Dieses Leitprogramm macht dich mit einer neuen Sorte von Gleichungen bekannt: den quadratischen Gleichungen.

Stell dir vor, du stehst auf einer etwa 15 Meter hohen Brücke und wirfst einen Stein in den Fluss. Wie lange dauert es, bis er unten ankommt?

Mit anderen Worten: Welche Zeit t verstreicht, bis der Stein die Höhe h = 15 m durchfallen hat? Vielleicht kennst du aus der Physik das Fallgesetz. Es lautet: $h = 5\ t^2$. Die Zeit ist dabei in Sekunden angegeben, die Fallhöhe in Metern.

Die Fallhöhe ist also 5 mal die Fallzeit im Quadrat. Wir suchen die Fallzeit, somit müssen wir die Gleichung

$$15 = 5\ t^2$$

nach t auflösen.

Diese Gleichung ist *nicht linear*. Die Unbekannte t kommt im Quadrat vor. Die Gleichung wird deshalb „quadratisch“ genannt.

Was lernst du?

Quadratische Gleichungen können auch komplizierter sein. Ein Beispiel:

$$4(x + 5) = 3x^2 - x + 1.$$

Es wird dir nach dem Studium dieses Leitprogrammes keine Mühe bereiten, eine solche Gleichung aufzulösen. Am Schluss kennst du sogar eine Formel, mit der die Lösungen ganz routinemässig berechnet werden können.

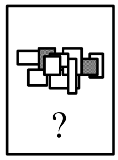
Wozu lernst du das?

Gleichungen nehmen in der Mathematik und ihren Anwendungen einen wichtigen Platz ein. Dort werden viele Probleme mit Hilfe von Gleichungen gelöst. Das können lineare, aber auch nichtlineare Gleichungen sein.

Mit den einen kannst du schon gut umgehen. Die anderen hingegen sind dir noch fremd. Deshalb lernst du jetzt eine erste Sorte von nichtlinearen Gleichungen besser kennen.

Arbeitsanleitung

Wie sind die Kapitel aufgebaut?



Das Leitprogramm besteht aus vier Kapiteln, die alle den gleichen Aufbau haben. Zuerst erhältst du einen *Überblick*. Dann weisst du, worum es geht und was du lernen kannst.

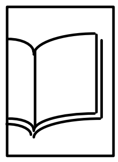
Anschliessend folgt der eigentliche *Text*. Lies ihn in Ruhe durch und löse die eingestreuten *Aufgaben*. Die Lösungen findest du jeweils ganz am Schluss des Kapitels.

Wenn du am Ende eines Kapitels angelangt bist, wartet noch der *Kapiteltest* auf dich. Auf ihn kannst du dich mit speziellen Aufgaben, den *Lernkontrollen*, vorbereiten.

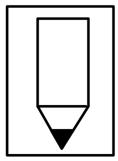
Den Kapiteltest legst du bei deiner Lehrerin ab. Vielleicht zeigt das Resultat, dass dir etwas noch nicht ganz klar ist. Dann wird dir der Lehrer sagen, welche Teile des Kapitels du nochmals studieren musst. Hast du den Test bestanden, so kannst du mit dem nächsten Kapitel beginnen.

Und nun musst du eigentlich nur noch wissen, was die Symbole am rechten Rand bedeuten. Dann kannst du anfangen!

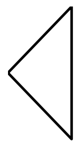
Was bedeuten die Symbole?



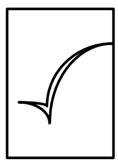
Lektüre
Lies den entsprechenden Text in Ruhe und aufmerksam durch.



Aufgabe
Dieses Zeichen kündigt eine Aufgabe an, die du mit Papier und Bleistift (und vielleicht mit dem Taschenrechner) bearbeiten kannst. Die Lösungen der Aufgaben findest du immer am Ende des betreffenden Kapitels.



Hinweis oder Definition
Präg dir den Text neben diesem Zeichen besonders gut ein! Es handelt sich entweder um einen wichtigen Hinweis oder um die Erklärung eines mathematischen Ausdruckes.



Kapiteltest
Dieses Symbol fordert dich auf, bei der Lehrerin oder beim Lehrer den Kapiteltest abzulegen.

Kapitel 1: Was sind quadratische Gleichungen?

In diesem Kapitel lernst du die quadratischen Gleichungen kennen. Das sind grob gesagt Gleichungen, bei denen die Unbekannte im Quadrat vorkommt.

Diese Gleichungen können auf den ersten Blick sehr unterschiedlich aussehen. Durch Umformen wirst du aber feststellen, dass die Unterschiede im Grunde gar nicht so gross sind. Du lernst bald die sogenannte Normalform kennen. Das ist eine einheitliche Form für quadratische Gleichungen.

Am Schluss dieses Kapitels bist du in der Lage, von jeder Gleichung zu sagen, ob sie quadratisch ist. Und nicht nur das. Du wirst schon viele quadratische Gleichungen auflösen können.

Damit du dieses Ziel erreichst, stellen wir dir zuerst verschiedene Beispiele vor. Wir zeigen dir jedesmal, wie du die Gleichung auflösen kannst. Dazwischen hast du Gelegenheit, das erworbene Wissen in Aufgaben anzuwenden und zu festigen. Und am Schluss lernst du, wie du jede quadratische Gleichung in der Normalform darstellen kannst.

Ein erstes Beispiel

Gleichungen dienen in der Mathematik und ihren Anwendungen dazu, Probleme zu lösen. Deshalb stellen wir dir gerade am Anfang eine Aufgabe:

Zeichne ein Quadrat mit der Fläche 10 cm^2.

Bevor du loszeichnen kannst, musst du die Länge der Quadratseite herausfinden. Die kannst du zum Beispiel berechnen: Du weisst, dass die Seitenlänge im Quadrat gleich 10 sein soll. Demnach muss die Länge selbst die Wurzel aus 10 sein. Mit dem Taschenrechner findest du $\sqrt{10} \approx 3.16$. So lang ist eine Seite. Jetzt kannst du das Quadrat zeichnen.

Bei dieser „Kopfrechnung" hast du eine einfache quadratische Gleichung aufgestellt

$$x^2 = 10$$

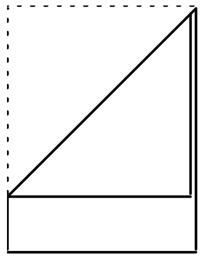
(x bezeichnet die Seitenlänge) und durch *Wurzelziehen* aufgelöst:

$$x = \sqrt{10}$$

Aufgabe 1: Löse das Problem, das in der Einführung gestellt worden ist. Wie lange dauert der Fall des Steines?

(Die Lösung der Aufgabe findest du am Schluss des Kapitels auf Seite 13.)

Aufgabe 2: Nimm ein A4-Blatt, zum Beispiel dieses hier, und falte es gemäss der folgenden Zeichnung:



Miss nun die Länge des Faltes und die Höhe des Blattes ... Erstaunlich, nicht wahr?

Offenbar ist die Faltlinie gerade gleich lang wie die grössere Blattseite. Die Länge des Blattes hat also etwas mit der Breite zu tun.

Weshalb? Überlege dir, warum hier die Breite ins Spiel kommt und versuche dann, die Länge eines A4-Blattes durch dessen Breite auszudrücken. Welche Formel erhältst du?

(Wieder findest du die Lösung am Ende des Kapitels. Schlage aber nicht zu früh nach. Nimm dir Zeit zum Nachdenken.)

Lösungen einer quadratischen Gleichung

Betrachten wir die Gleichung aus dem Einführungsbeispiel

$$15 = 5\,t^2$$

einmal losgelöst vom Problem des fallenden Steines. Dann sehen wir, dass sie eigentlich

zwei Lösungen

hat! Die Gleichung ist auch erfüllt, wenn wir für t die Zahl $-\sqrt{3}$ einsetzen:

$$\begin{aligned} 15 &= 5\left(-\sqrt{3}\right)^2 \\ &= 5\,(-\sqrt{3})\,(-\sqrt{3}) = 5 \cdot 3 \end{aligned}$$

Wenn wir eine Zahl anstelle der Unbekannten einsetzen und sehen, dass die Gleichung erfüllt ist, dann ist diese Zahl eine *Lösung der Gleichung*. Eine quadratische Gleichung kann also *zwei* Lösungen haben.

Eine andere Frage ist es, ob für das ursprünglich gestellte *Problem* alle Lösungen in Frage kommen. Beim fallenden Stein fällt die negative Zahl sicher ausser Betracht. Die Zeit verläuft ja nicht rückwärts (obschon man sich das vielleicht manchmal wünschen würde!).

Wir geben von jetzt an immer alle möglichen Lösungen an. Das solltest auch du so halten. Denn wenn die Mathematik helfen soll, Probleme zu lösen, dann müssen wir auf alles gefasst sein. Es gibt Fälle, wo wirklich beide Lösungen von Interesse sind!

Auflösen durch Wurzelziehen

Einfache quadratische Gleichungen können durch Wurzelziehen gelöst werden. Das hast du in den Beispielen gesehen. Oft ist das allerdings nicht auf Anhieb möglich. Eine Gleichung wie

$$3x^2 - 5 = 1$$

muss zuerst umgeformt werden:

$$\begin{aligned} 3x^2 - 5 &= 1 \\ 3x^2 &= 6 \\ x^2 &= 2 \end{aligned}$$

Nun lassen sich die Lösungen ablesen:

$$x = \sqrt{2} \qquad \text{und} \qquad x = -\sqrt{2}$$

Aufgabe 3: Versuche die folgenden Gleichungen zu lösen.

a) $v^2 + 4 = 12$

b) $\frac{1}{2} z^2 + \sqrt{5} = \sqrt{5}$

c) $s^2 + 25 = 0$

d) $(t - 5)^2 = 9$

e) $(2r - 3)^2 = 81$

Du kannst auch hier deine Lösungen kontrollieren. Schlage am Schluss des Kapitels nach.

Auflösung auf einen Blick

Quadratische Gleichungen können in ganz unterschiedlicher Gestalt auftreten. Nimm die folgende Gleichung:

$$(x - 1)\,(x - 5) \;=\; 0$$

Auch sie ist quadratisch! Wir formen sie um, indem wir die linke Seite ausmultiplizieren. Das führt uns zu $x^2 - 6x + 5 \;=\; 0$. Voilà! „x“ kommt im Quadrat vor.

Die ursprüngliche Form $(x - 1)\,(x - 5) = 0$ ist aber besonders erfreulich. Die Lösun-gen springen einem nämlich direkt ins Auge! Auf der linken Seite haben wir ein Produkt zweier Zahlen. Die Zahl $(x - 1)$ wird mit der Zahl $(x - 5)$ multipliziert. Wir kennen beide Zahlen nicht, aber wir wissen, dass ihr Produkt Null ist.

Wenn ein Produkt Null sein soll, dann muss einer der Faktoren Null sein. Das heisst: Entweder ist

$$x - 1 \;=\; 0\,, \quad \text{also} \quad x \;=\; 1$$

oder aber

$$x - 5 \;=\; 0\,, \quad \text{also} \quad x \;=\; 5$$

Kontrollieren wir: Setzen wir anstelle von x die Zahl 1 ein, so ist die Gleichung erfüllt: $0 \cdot (1 - 5) = 0$. Für $x = 5$ ebenso: $(5 - 1) \cdot 0 = 0$. Die Zahlen

$$1 \;\text{ und }\; 5$$

sind die Lösungen unserer Gleichung.

Aufgabe 4: Welche Lösungen haben die folgenden quadratischen Gleichungen?

a) $(x - 9)\,(x + 2) \;=\; 0$

b) $5x^2 \;-\; 3x \;=\; 0$

c) $2x \;=\; 4x^2$

d) $4\,(2 - x)\,(5x - 3) \;=\; 0$

Aufgabe 5: Suche je eine quadratische Gleichung mit den folgenden Lösungen:

a) 2 und 3

b) 1 und -1

Wann ist eine Gleichung quadratisch?

Du bist nun bereits drei typischen Varianten von quadratischen Gleichungen begegnet:

$$
\begin{aligned}
x^2 - 6x + 5 &= 0 \\
(2r - 3)^2 &= 81 \\
(x - 2)\,(x - 3) &= 0
\end{aligned}
$$

Diese drei Gleichungen sind alle quadratisch, sehen aber verschieden aus. Was genau ist ihnen gemeinsam? Wir können sie so umformen, dass sie ähnlich wie die erste aussehen! Nehmen wir das zweite Beispiel. Wenn wir die linke Seite ausmultiplizieren, erhalten wir

$$
\begin{aligned}
(2r - 3)^2 &= 81 \\
4r^2 - 12r + 9 &= 81 \qquad | -81
\end{aligned}
$$

Nun zählen wir auf beiden Seiten 81 ab und teilen die Gleichung noch durch 4:

$$
\begin{aligned}
4r^2 - 12r - 72 &= 0 \qquad | \ :4 \\
r^2 - 3r - 18 &= 0
\end{aligned}
$$

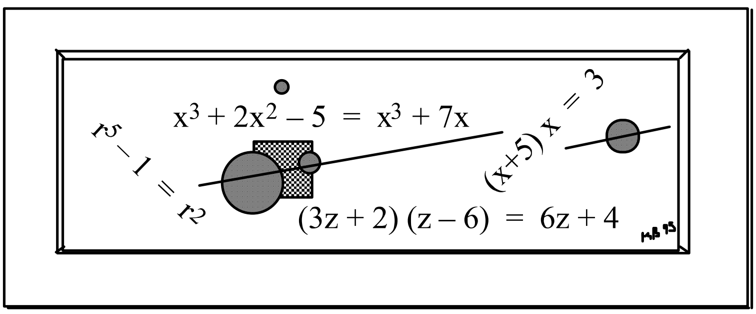
Definition: Wenn wir eine Gleichung so umformen können, dass sie die folgende Gestalt annimmt, dann heisst sie *quadratisch*:

$$x^2 + px + q = 0$$

p und q sind beliebige, gegebene Zahlen. Mit „x“ ist natürlich die unbekannte Grösse gemeint.

Die Form $x^2 + px + q = 0$ heisst *Normalform* einer quadratischen Gleichung. Die Zahlen p und q werden *Koeffizienten* genannt.

Aufgabe 6: Wie viele quadratische Gleichungen erkennst du auf diesem „Bild“?



Bring die Gleichungen auf Normalform und gib ihre Koeffizienten an.

Lernkontrolle A

Die Aufgaben der Lernkontrolle sollen dir zeigen, ob du gut vorbereitet bist für den Kapiteltest. Wenn du die Aufgaben richtig gelöst hast, dann sollte dir der Test keine Probleme mehr bereiten. (Hast du das Kapitel zum zweiten Mal durchgearbeitet, dann stehen dir die Aufgaben B auf der nächsten Seite zur Verfügung.)

Die Resultate der Aufgaben sind am Schluss des Lösungsteils aufgeführt.

1. Löse die folgenden Gleichungen auf:

   a) $9u^2 - 100 = 4u^2$

   b) $(11 - z)^2 + 22z = 125$

   c) $(x - 4)^2 - 256 = 0$

2. Bestimme die Lösungen der Gleichungen

   a) $(x + 1.5)(x - 2) = 0$

   b) $x^2 - 8x + 4 = 4$

3. Suche eine quadratische Gleichung mit den Lösungen 2 und -8.

4. Bringe die quadratische Gleichung

   $$3x^2 - 1 = (x + 2)\,2x$$

   auf Normalform.

Melde dich nun zum Kapiteltest an.

Lernkontrolle B

Wenn die folgenden Aufgaben richtig gelöst hast, wirst du den Test sicher mit Erfolg ablegen!

1. Löse die folgenden Gleichungen auf:

   a) $x\,(x + 7) = 7\,(x + 28)$

   b) $(2y + 3)^2 = y^2 + 12y$

   c) $(2b + 35)^2 = 625$

2. Finde eine quadratische Gleichung mit den Lösungen

   a) 2 und 5

   b) 0 und -4

3. Gib die Lösungen der beiden Gleichungen an:

   a) $s^2 = 13s$

   b) $2r\,(r^2 - 18) = 0$

4. Ist die folgende Gleichung quadratisch?

   $8 + x^3 = (x^2 + 1)\,x + 5x^2$

Jetzt klappt der Kapiteltest bestimmt!

Kapitel 2: Quadratische Ergänzung

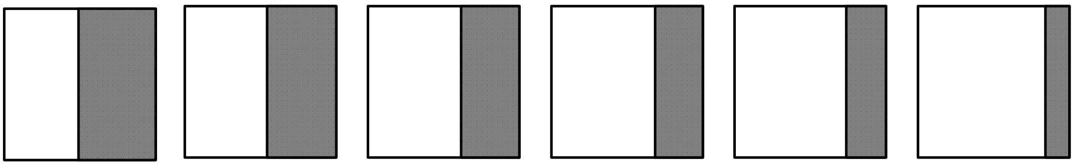
Umformen und Wurzelziehen - das beschreibt den Weg, auf dem wir bisher quadratische Gleichungen gelöst haben. Ist dieser Weg bei jeder quadratischen Gleichung gangbar? Können wir jede quadratische Gleichung so umformen, dass sie mit Wurzelziehen gelöst werden kann?

Wir können! Die Methode dafür heisst „Quadratisches Ergänzen“ und ist eines der Glanzstücke der Algebra. Wenn wir quadratisch ergänzen, haben wir mit Wurzelziehen Erfolg.

Zuerst führen wir dir ein Beispiel vor, bei dem die bisher benutzten Lösungsmethoden nicht zum Ziel führen. Dann zeigen wir dir die Idee, mit der sich schliesslich jede quadratische Gleichung auflösen lässt. Du kannst die Methode später an einigen Beispielen selber erproben, bis du eine gewisse Sicherheit erlangt hast.

Ein schönes Beispiel

Betrachte einen Moment lang diese sechs Quadrate:



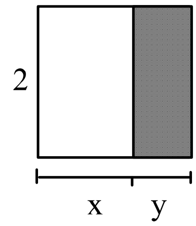
Welches ist deiner Ansicht nach am schönsten, am harmonischsten unterteilt?

Es ist interessant, dass viele Menschen in diesem Fall das vierte Quadrat von rechts wählen. Es ist nach dem Goldenen Schnitt unterteilt. Diese Unterteilung gilt von jeher als besonders ausgeglichen und harmonisch.

Der Goldene Schnitt war deshalb lange Zeit das bevorzugte Mass, wenn es um eine schöne Anordnung ging. Diese Tradition ist auch in unserem Jahrhundert noch nicht ausgestorben. Der Schweizer Archtiekt Le Corbusier entwarf vor etwa 50 Jahren ein Haus, bei dem die Fassadenelemente im Goldenen Schnitt unterteilt sind. Und noch heute kannst du dieses Teilungsverhältnis an manchen Häusern feststellen.

Schon früh wurde versucht, dieses Verhältnis mathematisch zu beschreiben. Man fand heraus, dass bei einer „schön“ unterteilten Strecke sich die kleinere Teilstrecke zur grösseren so verhält wie die grössere zur ganzen Strecke.

Wie müssen wir also die Seite beim „schönen“ Quadrat unterteilen?
Die abgebildeten Quadrate haben eine Seitenlänge von 2 Zentimetern. Diese zwei Zentimeter müssen wir im Goldenen Schnitt unterteilen:



Bezeichnen wir die Länge der ersten, grösseren Teilstrecke mit x und die Länge der kleineren Teilstrecke mit y. Dann muss die folgende Proportion gelten:

$$y : x \;=\; x : 2$$

Die kleinere Teilstrecke y ist gleich 2 – x. Das kannst du an der Figur ablesen. Also gilt das Verhältnis (2 – x) : x = x : 2. Anders ausgedrückt heisst das:

$$\frac{2-x}{x} = \frac{x}{2}$$

Hier haben wir es mit einer quadratischen Gleichung für x zu tun! Wenn wir die Gleichung nämlich mit 2 und dann noch mit x multiplizieren ergibt sich

$$2\,(2-x) \;=\; x^2$$

Rechnen wir die linke Seite noch aus, so erhalten wir

$$4-2x \;=\; x^2$$

Wie soll man diese quadratische Gleichung lösen? Bei ihr versagen die Auflösungsmethoden, die wir im letzten Kapitel benutzt haben. Wir brauchen eine neue Idee!

Hier ist sie:

Aufgabe 1: Löse die folgenden Gleichungen der Reihe nach auf. Schau dir zuerst jede Gleichung genau an. Vergleiche sie mit der vorherigen: Worin unterscheidet sie sich? Was ist gleich? Das gibt dir vielleicht einen Hinweis, wie du diese Gleichung auflösen kannst.

1

a) $(x+1)^2 \;=\; 3$

b) $x^2+2x+1 \;=\; 9$

c) $x^2+2x \;=\; 4$

d) $4-2x \;=\; x^2$

Die Lösungsidee

Die Aufgabe 1 enthält die Idee, wie beliebige quadratische Gleichungen aufgelöst werden können. Versuchen wir den Kern dieser Idee ganz genau zu verstehen! Nehmen wir ein neues Beispiel:

(1) $$x^2 + 5x = 10$$

Wir möchten durch Addition einer Zahl auf beiden Seiten von (1) die linke Seite mit Hilfe der binomischen Formel „zu einem Quadrat“ machen - und danach die Wurzel ziehen. Links hätten wir also gerne einen Ausdruck der Form

$$(x + a)^2$$

Wenn wir $(x + a)^2$ ausmultiplizieren, erhalten wir $x^2 + 2a{\cdot}x + a^2$. Wenn wir diesen Ausdruck mit $x^2 + 5x$ vergleichen, sehen wir, dass $2a = 5$, d.h. $a = \frac{5}{2}$ eine gute Wahl ist. Wegen

(2) $$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = x^2 + 5x + \frac{25}{4}$$

folgt, dass wir auf beiden Seiten der Gleichung (1) die Zahl $\frac{25}{4}$ addieren müssen:

$$x^2 + 5x + \frac{25}{4} = 10 + \frac{25}{4}$$

Umformen mit (2) ergibt

(3) $$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{65}{4}$$

Damit ist das Ziel erreicht! Solche Gleichungen haben wir schon im ersten Kapitel angetroffen. Aus (3) folgt

$$x + \frac{5}{2} = \sqrt{\frac{65}{4}} \qquad \text{oder} \qquad x + \frac{5}{2} = -\sqrt{\frac{65}{4}}$$

Das sind lineare Gleichungen. Aus ihnen erhalten wir die Lösungen

$$x = -\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{65}}{2} \qquad \text{und} \qquad x = -\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{65}}{2}$$

Der Vorgang, der von Gleichung

(1) $$x^2 + 5x = 10$$

zur Gleichung

(3) $$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{65}{4}$$

führt, heisst *quadratisches Ergänzen*.

Aufgabe 2: Ergänze die folgenden Ausdrücke zu einem Quadrat. Welche Zahl musst du jeweils dazuzählen?

a) $x^2 + 4x$

b) $u^2 - 6u$

c) $y^2 - \frac{2}{3}y$

d) $k^2 + 3k$

Aufgabe 3: Löse die angegebenen Gleichungen (mit quadratischem Ergänzen):

a) $x^2 + 4x = 10$

b) $z^2 - 6z + 2.75 = 0$

c) $a^2 - 1.8a + 0.81 = 0$

d) $x^2 - x - 1 = 0$

Das waren alles Gleichungen in Normalform. Mit einem kleinen zusätzlichen Aufwand bist du auch in der Lage, beliebige quadratische Gleichungen zu lösen.

Aufgabe 4: Löse auch diese quadratischen Gleichungen mit quadratischem Ergänzen auf (Hinweis: Bringe sie zuerst auf Normalform):

a) $2x^2 + x - 10 = 0$

b) $-3y^2 + 2y - \frac{1}{3} = 0$

c) $0.4\,t^2 - 3.2\,t + 2 = 0$

d) $-z^2 - z - 1 = 0$

Lernkontrollen A und B

Löse die Aufgaben B, wenn du das Kapitel zum zweiten Mal durchgearbeitet hast.

A

1. Mit welcher Zahl kannst du den Ausdruck $p^2 - 16p$ zu einem Quadrat ergänzen?

2. Welche Lösungen haben die folgenden Gleichungen?

   a) $y^2 - 6y + 3 = 0$

   b) $3c^2 + 4c - 4 = 0$

B

1. Wie gross ist die quadratische Ergänzung des Ausdrucks $a^2 + 10a$?

2. Löse die folgenden Gleichungen

   a) $-z^2 - 2z - 0.84 = 0$

   b) $2t^2 - 3t - 2 = 0$

Nun hast du schon einige Übung im Umgang mit quadratischen Gleichungen. Das ist der passende Moment, nochmals zurückzublicken.

Vor kurzem hätte dir die Auflösung der Gleichung $x^2 + x = 10$ noch grosses Kopfzerbrechen bereitet. Ohne das „x" wäre es einfach gewesen. Aber so?

Jetzt siehst du, dass dieses Problem gar nicht wirklich schwieriger ist als die Auflösung der Gleichung $x^2 = 10$ ... sofern die Idee der quadratischen Ergänzung bekannt ist!

Das ist die Wirkung einer guten Idee: Sie ebnet den Weg, um ein neues Problem mit bekannten Methoden zu lösen.

Und nun wünschen wir dir viel Erfolg beim Kapiteltest.