

Der mathematische Begriff einer Menge

1 Was ist eine Menge?

In der Mathematik versteht man unter einer Menge eine Zusammenfassung von unterscheidbaren Objekten. Dabei ist es vollkommen egal, um was für Objekte es sich eigentlich handelt.

Der Begriff der Menge ist eines der grundlegendsten und wichtigsten Modelle der Mathematik. Die Mengenlehre ist der Teilbereich der Mathematik, der sich mit Mengen und ihren Eigenschaften auseinandersetzt.

Mit Hilfe von Mengen kann man mathematische Sachverhalte kurz und prägnant ausdrücken, neue mathematische Objekte erzeugen oder neue Konzepte modellieren.

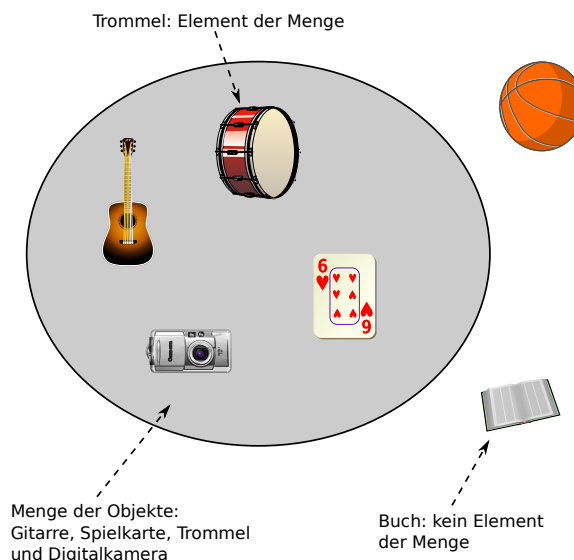
Eine Menge kann man sich bildlich als den Inhalt eines Behältnisses, zum Beispiel einer Kiste oder eines Sacks vorstellen.

2 Elemente einer Menge und Schreibweisen für Mengen

2.1 Elemente einer Menge

Gehört ein Objekt zu einer Menge, so nennt man dieses Objekt ein **Element** dieser Menge. Dieses Element ist also in der gerade betrachteten Menge enthalten.

Mengen können beliebige Elemente enthalten. Es können Zahlen, Punkte, Namen, Blumen, Autos oder sogar selbst wieder Mengen sein. Wichtig ist nur, ob ein Objekt Element einer Menge ist, oder nicht.



Veranschaulichung einer Menge mit vier Elementen, Quelle: siehe (1)

Sei x ein Objekt und M eine Menge. Mathematisch schreibt man dann $x \in M$ (sprich: x ist Element von M), falls x ein Element der Menge M ist und $x \notin M$, falls x kein Element der Menge M ist.

Bei Mengen kommt es nicht auf die Reihenfolge der enthaltenen Elemente an. Dasselbe Element kommt in einer Menge auch nur genau ein Mal vor. Andernfalls müsste man die mehrfach vorkommenden gleichen Elemente irgendwie unterscheidbar gestalten. Außerdem würde das Aufschreiben oder Angeben von Mengen wesentlich komplizierter werden, da es ja nicht auf die Reihenfolge der Elemente in der Menge ankommt.

2.2 Schreibweisen von Mengen

Mengen kann man auf unterschiedliche Art und Weise aufschreiben beziehungsweise angeben.

Aufzählen aller Elemente

Man kann eine Menge, die nur endlich viele Elemente enthält, einfach aufschreiben. Dabei gibt man alle Elemente der Menge als Aufzählung einfach zwischen einem Paar geschweiften Klammern an.

$$\{Rose, Nelke, Tulpe, Geranie\}$$

Um Mengen zu benennen verwendet man in der Regel Großbuchstaben, schreibt ein Gleichheitszeichen und gibt dann die Menge in geschweiften Klammern an.

$$M = \{Rose, Nelke, Tulpe, Geranie\} \qquad A = \{Sonne, Mond, Sterne\}$$

Aufzählen mit Auslassungspunkten

Wird die Menge zu groß, um alle Elemente aufschreiben zu können, so gibt man nur beispielhaft einige Elemente an, bis klar ist, welche Elemente enthalten sein sollen. Dazwischen oder dahinter schreibt man drei Punkte (Auslassungspunkte).

$$Z = \{2, 4, 6, 8, \dots, 98, 100\}$$

Die Menge Z besteht aus allen geraden Zahlen von 2 bis einschließlich 100.

Insbesondere falls die Menge unendlich viele Elemente hat, schreibt man die Auslassungspunkte hinter die angegebenen Elemente.

$$X = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$$

Die Menge X besteht aus allen ungeraden natürlichen Zahlen.

Angabe von Bedingungen

Man kann eine Menge auch angeben, in dem man eine Bedingung oder mehrere Bedingungen aufschreibt, die die Elemente der Menge erfüllen sollen.

$$B = \{\text{alle natürlichen Zahlen } x, \text{ die größer sind als } 100\}$$

Kürzer (und mathematischer) schreibt man dafür einfach:

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 100\}$$

Dabei steht \mathbb{N} für die Menge aller natürlichen Zahlen. Hinter dem senkrechten Strich steht in mathematischer Schreibweise die Bedingung für alle Elemente der Menge.

Auch das folgende Beispiel ist eine gültige Angabe für eine Menge:

$$G = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist gerade}\}$$

3 Leere Menge

Es gibt genau eine Menge, die keine Elemente enthält. Diese Menge nennt man die **leere** Menge. Es gibt zwei verschiedene Schreibweisen, die diese Menge bezeichnen. Entweder schreibt man zwei geschweifte Klammern ohne Elemente oder ein durchgestrichenes aufrecht stehendes Oval.

Soll L die leere Menge sein, so kann man also schreiben:

$$L = \{\} \text{ oder } L = \emptyset$$

4 Anzahl der Elemente in einer Menge (Mächtigkeit)

Die Anzahl der Elemente einer Menge nennt man die Mächtigkeit einer Menge. Auch hierfür gibt es zwei Schreibweisen. Als Beispiel diene die Menge

$$M = \{Rose, Nelke, Tulpe, Geranie\}$$

Diese Menge enthält genau vier Elemente. Mathematisch schreibt man kurz

$$|M| = 4 \text{ oder } \#M = 4$$

Die senkrechten Striche bezeichnet man als "Betrag". Die Menge \mathbb{N} aller natürlichen Zahlen besitzt unendlich viele Elemente. Daher gilt $|\mathbb{N}| = \infty$.

5 Gleichheit von Mengen

Zwei Mengen können nur dann gleich sein, falls sie dieselben Elemente besitzen und damit auch dieselbe Anzahl an Elementen haben.

Beispielsweise sind die folgenden beiden Mengen gleich:

$$M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \quad N = \{7, 3, 5, 2, 1, 6, 4\}$$

Formal gilt hier, dass für alle Elemente aus M gilt, dass sie auch Elemente von N sind. Man darf hier dann einfach $M = N$ schreiben.

Sind zwei Mengen nicht gleich, so schreibt man $M \neq N$. Beispielsweise sind die Mengen

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \text{ und } B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11\}$$

nicht gleich, da in B das Element 6 fehlt und das Element 11 hinzugekommen ist. Es reicht also schon aus, wenn sich zwei Mengen in einem einzigen Element unterscheiden, auch wenn die Mengen dieselbe Anzahl an Elementen besitzen.

6 Quellenangaben

- (1) Veranschaulichung einer Menge.svg:
Basketball.svg: Stellaris @ Open Clip Art Library
Bordered_h_6.svg: Nicu Buculei
Acoustic_guitar1.svg: narrowhouse
Bass_drum.svg: ArtFavor
Big_Book.svg: Jimmiet
Digital-camera_aj_ashton_01.svg: AJ Ashton
derivative work: Stephan Kulla (User:Stephan Kulla)
CC BY 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=14259309>