Relationen, Funktionen: *Aufgaben 4, 5*

Wichtige Begriffe im Zusammenhang mit Funktionen

Funktionen und Relationen sind sehr ähnlich. Sie unterscheiden sich aber in Ihrer grafischen Darstellung.

Eine Relation wird im folgenden beschrieben mit y=.

Zum besseren Verständnis sollte man zunächst eine Wertetabelle für die einzelnen Relationen erstellen.

Beispiel für 5a) $y=x^2 - 1$

x	-2	-1	0	1	2	3	.....
y	3	0	1	0	3	8	

Aufgabe 5:

Welche der dargestellten Relationen sind Funktionen:

$a)\quad y = x^2 - 1, \qquad y^2 = x - 2$

$b)\quad y = \sin x, \qquad y = \sin(2x)$

$c)\quad y = \sqrt{x}, \qquad y = e^x$

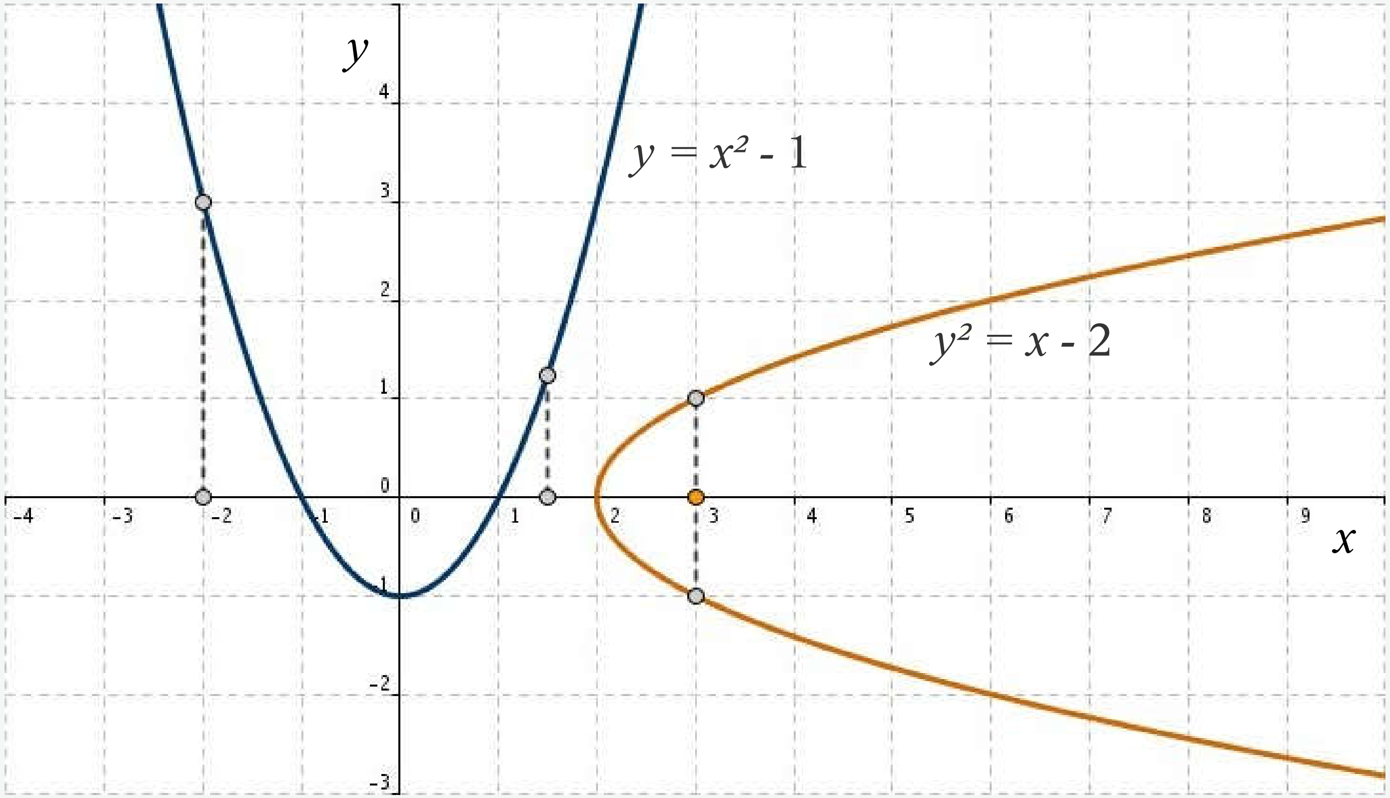


Abb. 10-1: Graphen von $y = x^2 - 1$ und $y^2 = x - 2$

$y = x^2 - 1$ – eine Funktion

$y^2 = x - 2$ – keine Funktion

Relationen, Funktionen: Lösung 5b

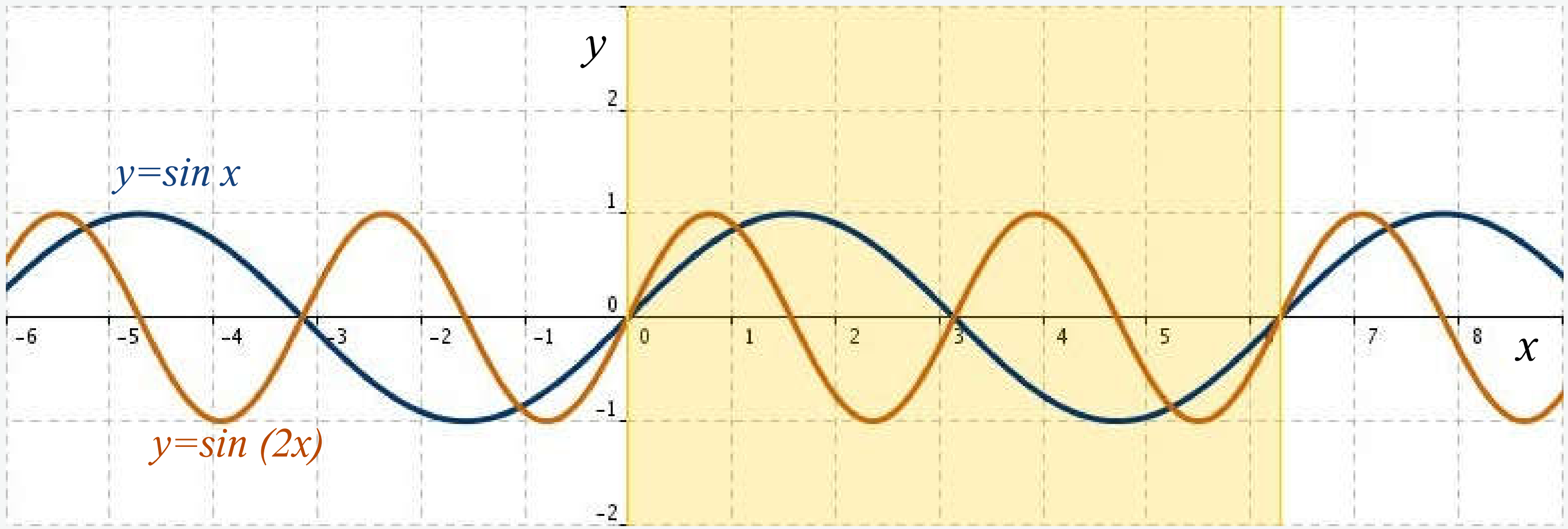


Abb. 10-2: Funktionen $y = \sin x$ und $y = \sin(2x)$

$y = \sin x$ – eine Funktion

$y = \sin(2x)$ – eine Funktion

Relationen, Funktionen: Lösung 5c

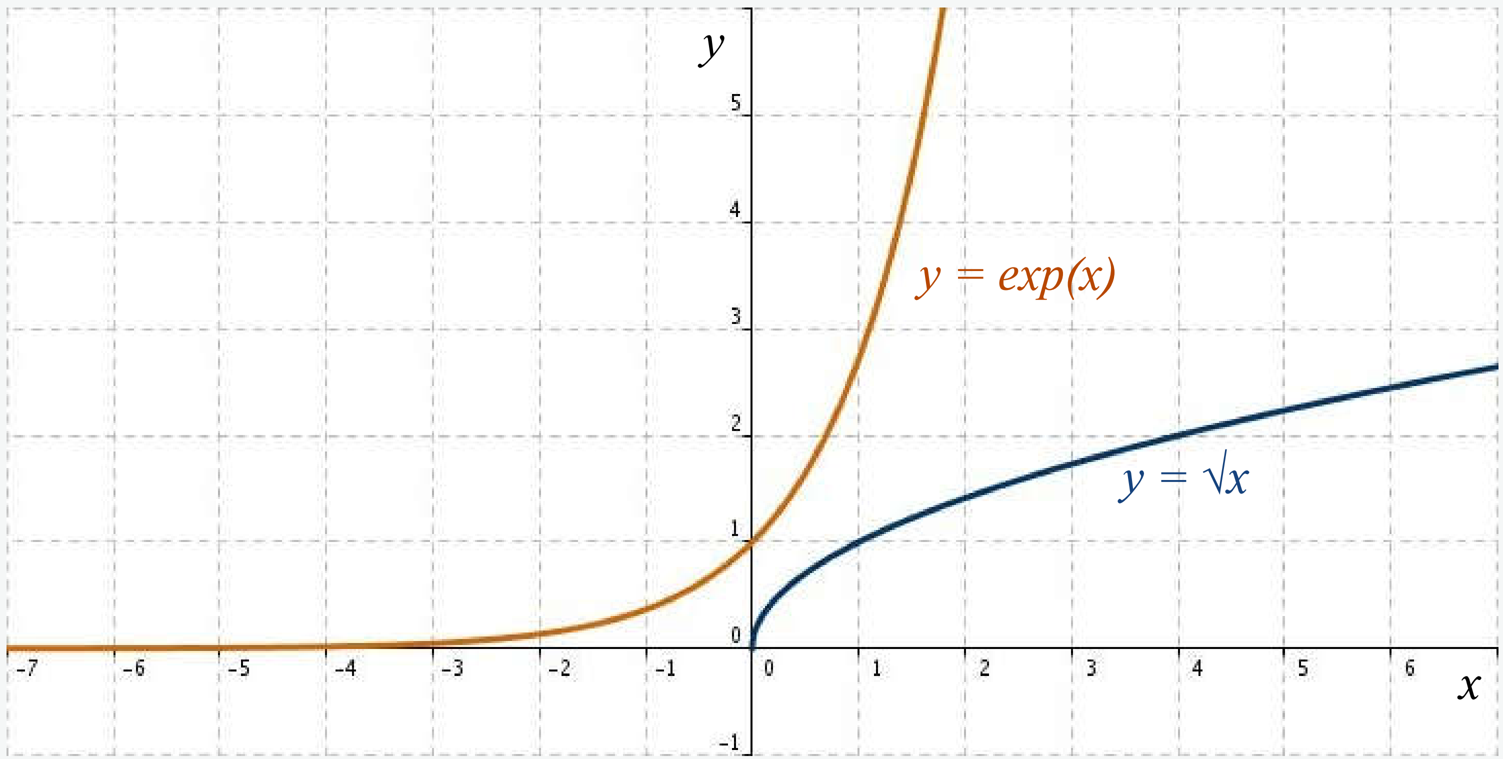
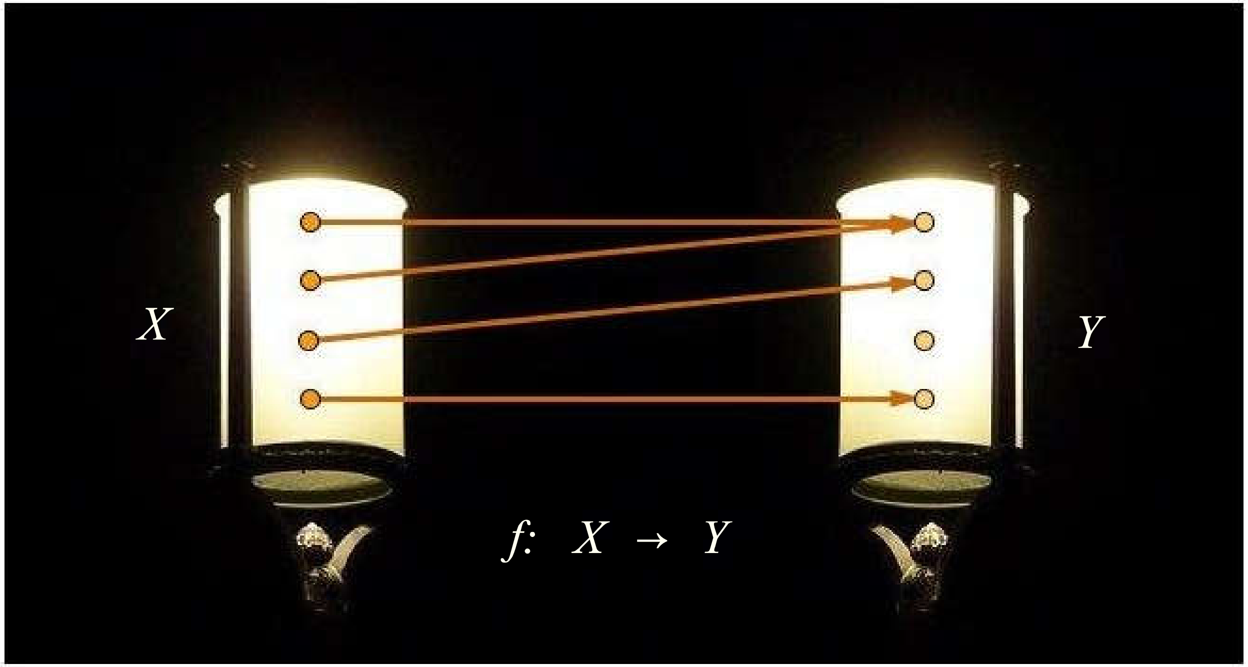


Abb. 10-3: Funktionen $y = \sqrt{x}$ *und* $y = \exp x$

$y = \sqrt{x}$ – eine Funktion

$y = e^{x}$ – eine Funktion

Eigenschaften einer Abbildung



http://www.flickr.com/photos/30177797@N02/3859992981/in/pool-streetlamps

Abb. 11: Darstellung einer Abbildung

Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ kann ohne Weiteres mehrere verschiedene Elemente von X auf das gleiche Element von Y abbilden. Andererseits kann es auch Elemente von Y geben, die von f gar nicht "getroffen" werden.

Eigenschaften einer Abbildung

Um Abbildungen zu charakterisieren werden wir nun drei neue wichtige Begriffe einführen:

Eine Abbildung $f: X \to Y, \; x \to f(x)$ heißt

- injektiv, wenn aus $x_1 \neq x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \neq f(x_2)$
- surjektiv, wenn auf jedes Element der Wertemenge hin abgebildet wird.
- bijektiv, wenn sie sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

Eigenschaften einer Abbildung: Injektiv

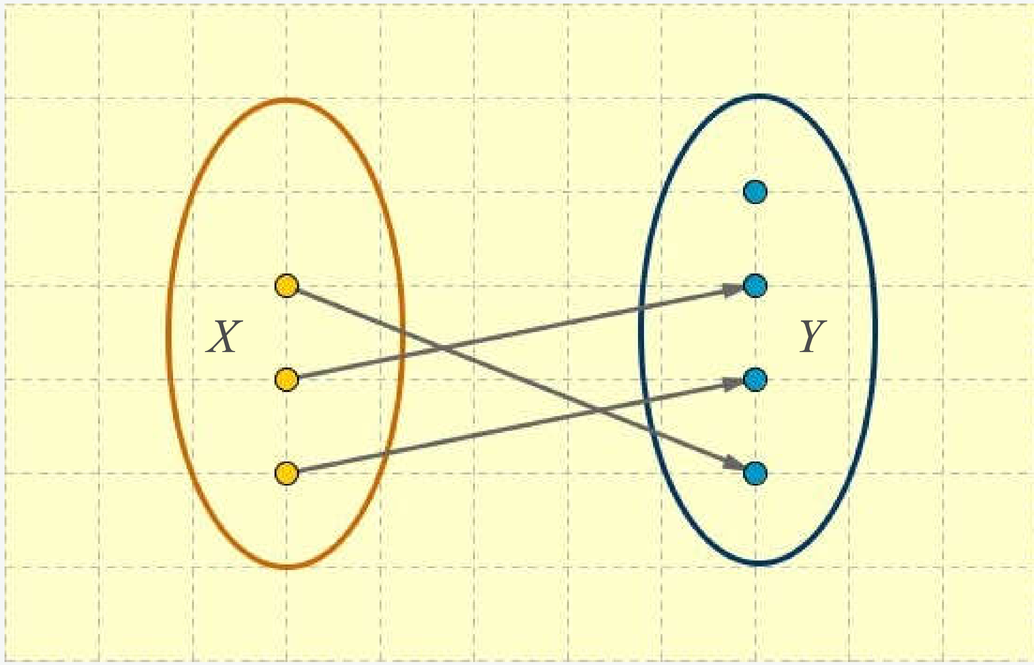


Abb. 12-1: Injektive Abbildung

Kennt man ein Bildelement $y = f(x)$, dann kann man x damit eindeutig bestimmen. Statt injektiv wird auch die Bezeichnung eineindeutig benutzt. Dies wird in der Literatur nicht ganz einheitlich genannt, manchmal ist damit auch bijektiv gemeint.

Eigenschaften einer Abbildung: Surjektiv

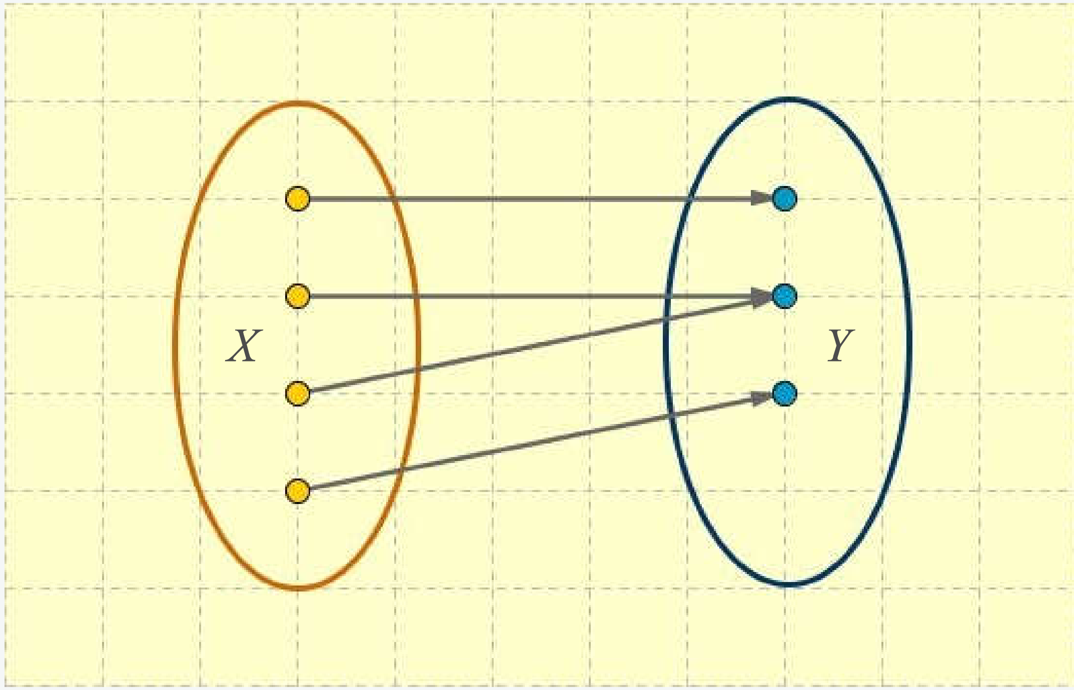


Abb. 12-2: Surektive Abbildung

Surjektivität heißt, dass tatsächlich jedes Element von Y Bild eines Elements von X ist. Bei Surjektivität wird der gesamte mögliche Wertebereich ausgenutzt.

Eigenschaften einer Abbildung: Injektiv, surjektiv

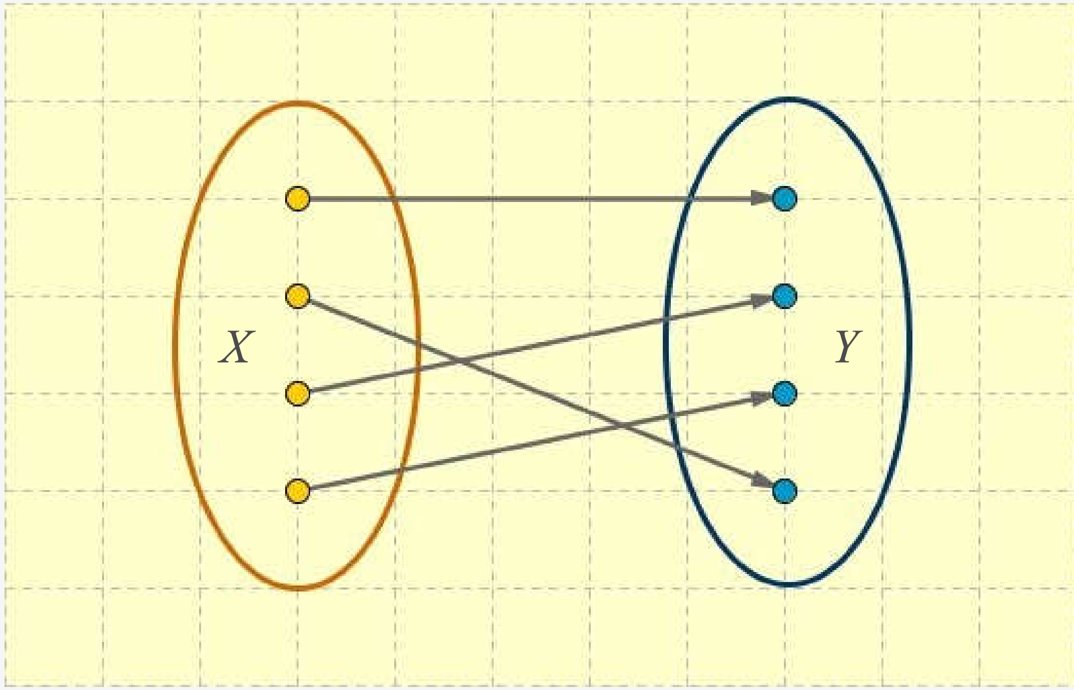


Abb. 12-3: Bijektive (injektive und surjektive) Abbildung

Eigenschaften einer Abbildung

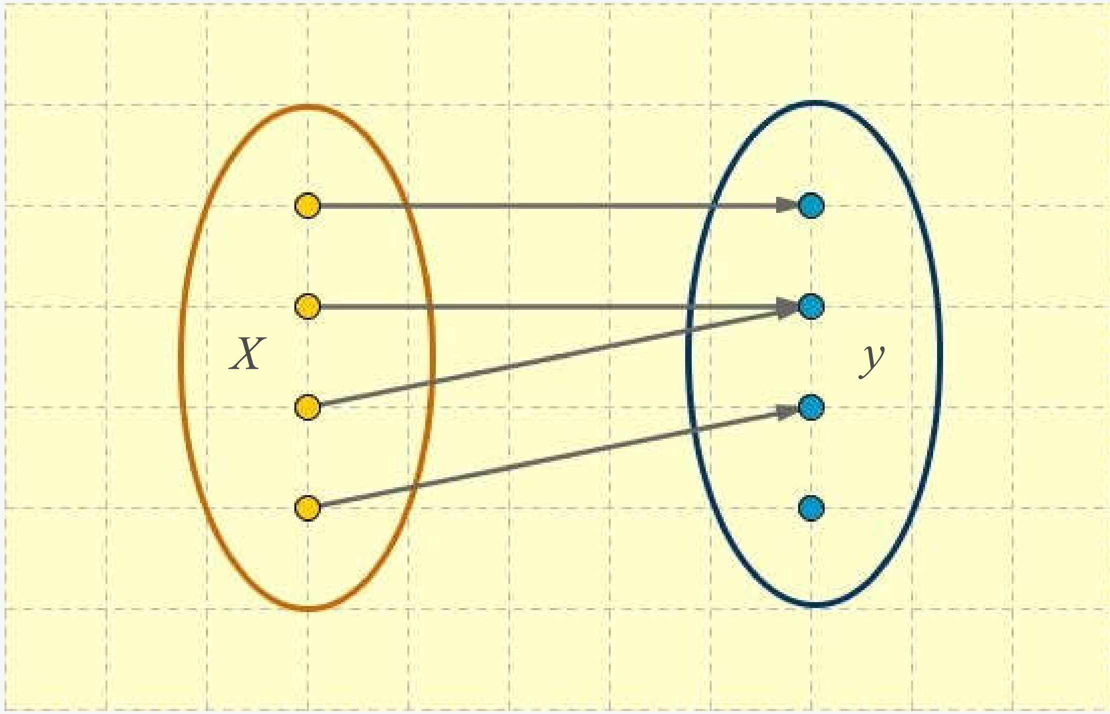


Abb. 12-4: Nicht injektive und nicht surjektive Abbildung

Eigenschaften einer Abbildung: Aufgaben 6, 7

Welche der folgenden Abbildungen sind injektiv, surjektiv oder bijektiv ?

Aufgabe 6:

$f(x) = 2\,(x-1)^2, \qquad g(x) = \sqrt{2x}\,, \qquad h(x) = 0.5\,x$

$D = [0,\ 2], \qquad W = [0,\ 2]$

Aufgabe 7:

$f(x) = |\,x\,|, \qquad g(x) = |\,x-2\,|$

$D = [0,\ 4], \qquad W = [0,\ 4]$

Eigenschaften einer Abbildung: Lösung 6

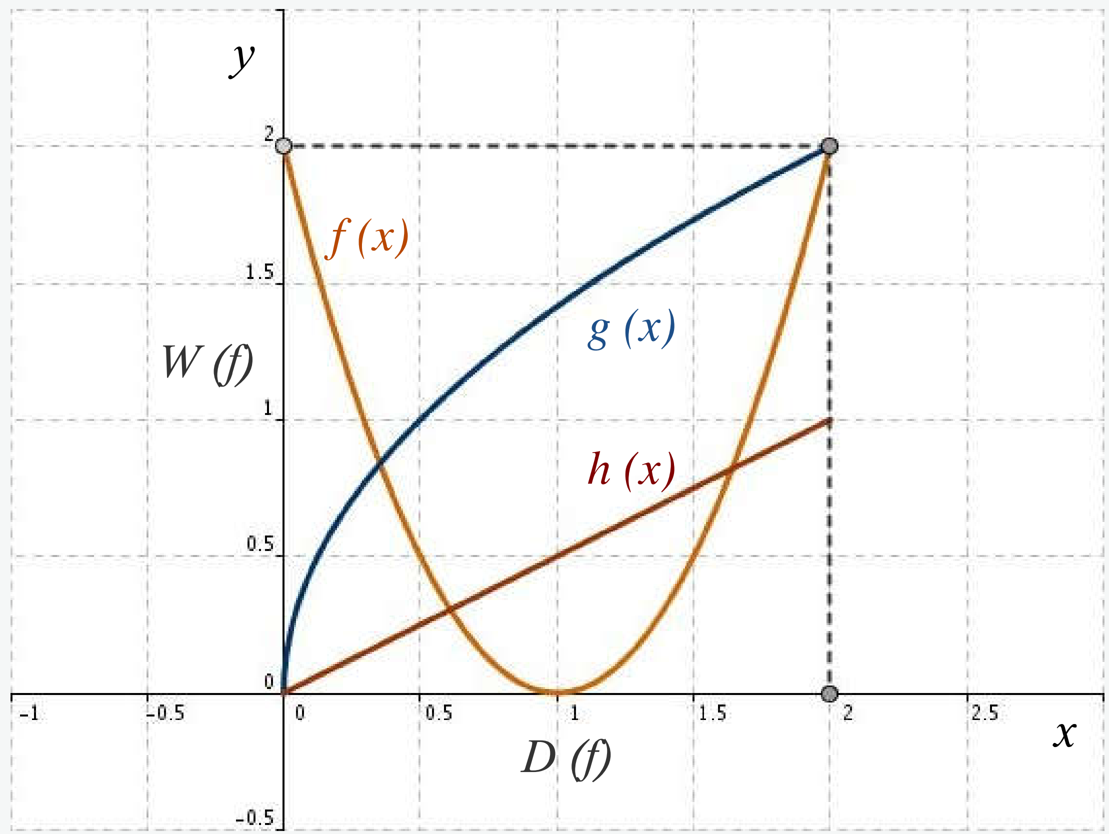


Abb. 13: Funktionen f (x), g (x) und h (x), D = [0, 2] und W = [0, 2]

$$f\,(x) = 2\,(x - 1)^2\,, \qquad g\,(x) = \sqrt{2\,x}\,, \qquad h\,(x) = 0.5\,x$$

$f\,(x)$ – surjektiv, $g\,(x)$ – bijektiv, $h\,(x)$ – injektiv

Eigenschaften einer Abbildung: Lösung 7

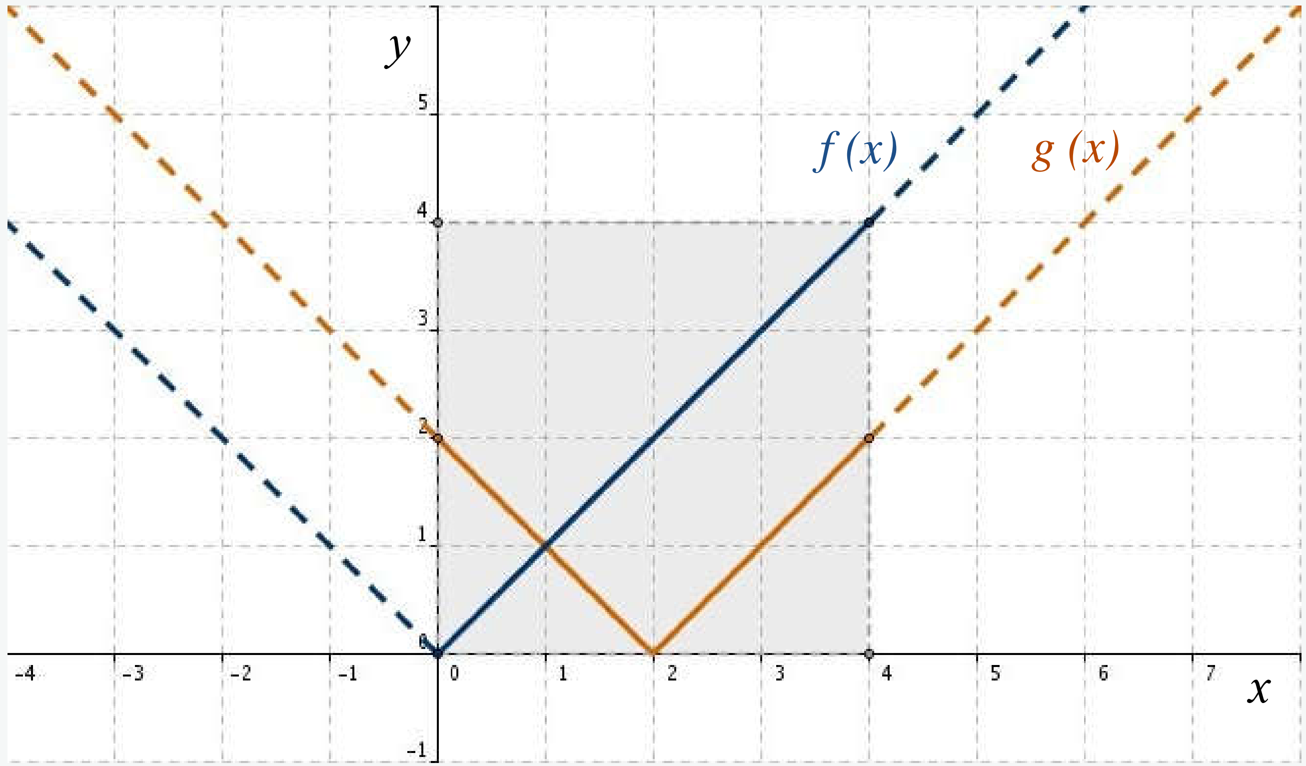


Abb. 14: Funktionen f (x) und g (x), D = [0, 4] und W = [0, 4]

$$f(x) = |x|, \qquad g(x) = |x - 2|$$

$f(x)$ – bijektiv, g (x) – nicht injektiv, nicht surektiv