16.12.2005

# Musterlösung zu 1)

Aufstellen der Funktionsgleichung

1. I $f(0,5) = \frac{133}{80}$

II $f'(1) = 0$

III $f(1) = 2$

IV $f(0) = 1,1$

$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$

I $\frac{3}{80} + \frac{10}{80} \cdot b + \frac{20}{80} c + \frac{40}{80} d + e = \frac{133}{80}$

II $\frac{12}{5} + 3b + 2c + d = 0$

III $\frac{3}{5} + b + c + d + e = 2$

IV $0 \cdot a + 0b + 0c + 0d + e = 1,1$

e einsetzen und auf die andere Seite bringen

$\Rightarrow$ I $\frac{1}{8} b + \frac{1}{4} c + \frac{1}{2} d = \frac{21}{40}$

$\Rightarrow$ II $3b + 2c + d = -\frac{12}{5}$

$\Rightarrow$ III $b + c + d = \frac{3}{10}$

Determinantenverfahren

$$D = \begin{vmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{3}{2} - 1 - \frac{3}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

16.12.2003

1.

$$D_1 = \begin{vmatrix} \frac{21}{40} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{12}{5} & 2 & 1 \\ \frac{3}{10} & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{21}{20} + \frac{3}{40} - \frac{6}{5} - \frac{3}{10} - \frac{21}{40} + \frac{3}{5} = -\frac{3}{10}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} \frac{1}{8} & \frac{21}{40} & \frac{1}{2} \\ 3 & -\frac{12}{5} & 1 \\ 1 & \frac{3}{10} & 1 \end{vmatrix} = -\frac{3}{10} + \frac{21}{40} + \frac{9}{20} + \frac{6}{5} - \frac{63}{40} - \frac{3}{80} = \frac{21}{80}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{21}{40} \\ 3 & 2 & -\frac{12}{5} \\ 1 & 1 & \frac{3}{10} \end{vmatrix} = \frac{3}{40} - \frac{3}{5} + \frac{63}{40} - \frac{21}{20} - \frac{9}{40} + \frac{3}{10} = \frac{3}{40}$$

$$b = \frac{D_1}{D} = \frac{-\frac{3}{10}}{\frac{1}{8}} = -\frac{12}{5}$$

$$c = \frac{D_2}{D} = \frac{\frac{21}{80}}{\frac{1}{8}} = \frac{21}{10}$$

$$d = \frac{D_3}{D} = \frac{\frac{3}{40}}{\frac{1}{8}} = \frac{3}{5}$$

$$f(x) = \frac{3}{5}x^4 - \frac{12}{5}x^3 + \frac{21}{10}x^2 + \frac{3}{5}x + \frac{11}{10}$$

2.

$$f'(x) = \frac{12}{5}x^3 - \frac{36}{5}x^2 + \frac{42}{10}x + \frac{3}{5}$$

$$f''(x) = \frac{36}{5}x^2 - \frac{72}{5}x + \frac{21}{5}$$

16.12.2009

2. Wendestelle von $f(x)$ mit $f''(x) = 0$

notwendige Bedingung

$$\frac{36}{5}x^2 - \frac{72}{5}x + \frac{21}{5} = 0 \qquad |-\frac{21}{5}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{36}{5}x^2 - \frac{72}{5}x = -\frac{21}{5} \qquad |:\frac{36}{5}$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 2x = -\frac{7}{12} \qquad |\text{q. E.}$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 2x + 1^2 - 1^2 = -\frac{7}{12} \qquad |+1$$

$$\Rightarrow \quad (x-1)^2 = \frac{5}{12} \qquad |\pm\sqrt{\phantom{x}}$$

$$x_1 - 1 = \sqrt{\frac{5}{12}} \quad \Rightarrow \quad x_1 = \sqrt{\frac{5}{12}} + 1$$

$$x_2 - 1 = -\sqrt{\frac{5}{12}} \quad \Rightarrow \quad x_2 = -\sqrt{\frac{5}{12}} + 1$$

hinreichende Bedingung

$$\left.\begin{aligned} f''\left(\sqrt{\tfrac{5}{12}} + 1 + \tfrac{1}{10}\right) &= 1{,}0015 > 0 \\ f''\left(\sqrt{\tfrac{5}{12}} + 1 - \tfrac{1}{10}\right) &= -0{,}8575 < 0 \end{aligned}\right\} \text{VZW} \Rightarrow \text{Minimum}$$

$$\left.\begin{aligned} f''\left(-\sqrt{\tfrac{5}{12}} + 1 + \tfrac{1}{10}\right) &= -0{,}8575 < 0 \\ f''\left(-\sqrt{\tfrac{5}{12}} + 1 - \tfrac{1}{10}\right) &= 1{,}0015 > 0 \end{aligned}\right\} \text{VZW} \Rightarrow \text{Maximum}$$

Er wechselt das erste Mal bei $0{,}3545 = x$ von einer Links- in eine Rechtskurve und bei $x = 1{,}6455$ von ein Rechts- in eine Linkskurve.

16. 12. 2009

3. Extremum von $f(x)$ mit $f'(x)=0$ notw. Bedingung

| $x$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $f(x)$ | $\frac{3}{5}$ | 0 |

Horner Schema anstatt Polynomdivision

| | $\frac{12}{5}$ | $-\frac{36}{5}$ | $\frac{21}{5}$ | $\frac{3}{5}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | $\frac{12}{5}$ | $-\frac{24}{5}$ | $-\frac{3}{5}$ |
| | $\frac{12}{5}$ | $-\frac{24}{5}$ | $-\frac{3}{5}$ | 0 |

$$\frac{12}{5}x^2-\frac{24}{5}x-\frac{3}{5}$$

$$\frac{12}{5}x^2-\frac{24}{5}x-\frac{3}{5}=0 \quad |+\frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{12}{5}x^2-\frac{24}{5}x=\frac{3}{5} \quad |\cdot\frac{5}{12}$$

$$\Rightarrow x^2-2x=\frac{1}{4} \quad |\text{q. E.}$$

$$\Rightarrow x^2-2x+1^2-1^2=\frac{1}{4} \quad |+1$$

$$\Rightarrow (x-1)^2=\frac{5}{4} \quad |\pm\sqrt{\phantom{x}}$$

$$x_1-1=\sqrt{\frac{5}{4}} \Rightarrow x_1=\sqrt{\frac{5}{4}}+1$$

$$x_2-1=-\sqrt{\frac{5}{4}} \Rightarrow x_2=-\sqrt{\frac{5}{4}}+1$$

hinreichende Bedingung

$$\left.\begin{array}{l} f'\left(\sqrt{\frac{5}{4}}+1+\frac{1}{10}\right)=0,682838>0 \\ f'\left(\sqrt{\frac{5}{4}}+1-\frac{1}{10}\right)=-0,5219<0 \end{array}\right\} \text{VZW} \Rightarrow \text{Minimum}$$

$f(x)$ erreicht bei $x_0 = 2,118\,\text{dm}$ den letzten Scheitelpunkt.

16.12.2005

4. Für x den Scheitelpunktwert nehmen

$f(2{,}118034) = 1{,}0625$

Der Scheitelpunkt liegt näher an der Wand als der Startpunkt des Roboters (1,1/0).
Er nähert sich der Wand bis auf 1,0625 dm.

5. Es ergibt keine sinnvolle physikalische Einheit.
Bei der Ableitung lässt sich $\frac{dm}{dm}$ kürzen und es bleibt 1 übrig.

6. Je nachdem, ob die Ableitung steigt oder sinkt kann man das eine Rad oder das andere schneller drehen lassen.
Ist die Ableitung der Funktion an einer Stelle steiler, so muss sich das Rad auch mehr drehen.