Übungsaufgabe

Aufgaben ○ **1** Geben Sie Grad, Koeffizienten und Absolutglied der Polynomfunktion an.

a) $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x + 6$
b) $f(x) = -8x^4 + x^3 - 2x$
c) $f(x) = x^6 + x^4 + x^2 + 1$
d) $f(x) = x(x^2 - 3x + 4)$
e) $f(x) = 3(x + 2)(x - 4)^2$
f) $f(x) = -2x(x - 3)(x - 4)(x - 5)$

○ **2** Wie verhält sich das Schaubild von f für $x \to +\infty$ und für $x \to -\infty$? Zeichnen Sie die Schaubilder von f und der Vergleichsfunktion g in ein Koordinatensystem.

a) $f(x) = 4x^3 - x^2 + 2x + 1$
b) $f(x) = 0{,}5x^4 - 1{,}5x^2 + x - 2$

○ **3** Welches Vorzeichen könnten die Funktionswerte f(1000) und f(−1000) haben? Überprüfen Sie Ihre Vermutung.

a) $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + x$
b) $f(x) = -x^5 + 3x^3 + 15\,000$
c) $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$
d) $f(x) = 10\,000x - 0{,}0001x^4$
e) $f(x) = x^3 - 1000x^2$
f) $f(x) = (x - 100)(x + 100)x$

◒ **5** Untersuchen Sie das Verhalten von f für $x \to +\infty$ und für $x \to -\infty$.

a) $f(x) = x^3 + x^2 + 1$
b) $f(x) = -3x^5 + 3x^2 - x^3$
c) $f(x) = (x + 2)(x - 1)(x - 4)$
d) $f(x) = 1010x^6 - 0{,}1x^7 + 250x$

$f_1(x) = x^6 - 2x^4 + 1{,}5x + 2$

$f_4(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

$f_2(x) = (x + 1)(x - 2)(x - 1) + 4$

$f_3(x) = -0{,}5x^4 + 2x^2 + 2$

$f_5(x) = x^3 - 3x + 2$

◒ **6** Ordnen Sie die Schaubilder (A bis D) den Funktionsgleichungen auf dem Rand zu.

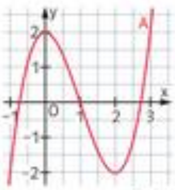


Fig. 1

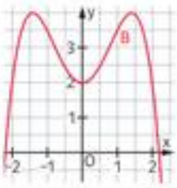


Fig. 2

Fig. 3

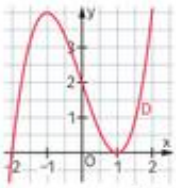


Fig. 4

Lösung

1 a) Grad 3; $a_3 = 2$; $a_2 = -5$; $a_1 = 4$; $a_0 = 6$ (Absolutglied)

b) Grad 4; $a_4 = -8$; $a_3 = 1$; $a_2 = 0$; $a_1 = -2$; $a_0 = 0$ (Absolutglied)

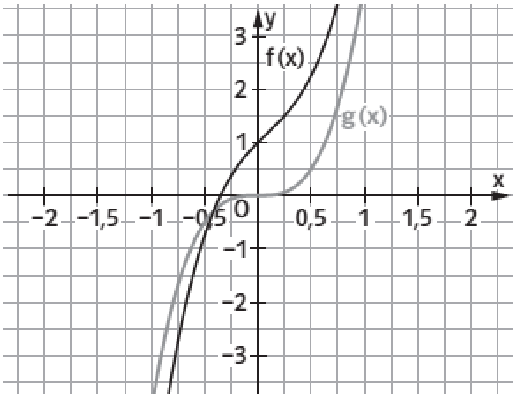
c) Grad 6; $a_6 = 1$; $a_5 = 0$; $a_4 = 1$; $a_3 = 0$; $a_2 = 1$; $a_1 = 0$; $a_0 = 1$ (Absolutglied)

d) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x$
Grad 3; $a_3 = 1$; $a_2 = -3$; $a_1 = 4$; $a_0 = 0$ (Absolutglied)

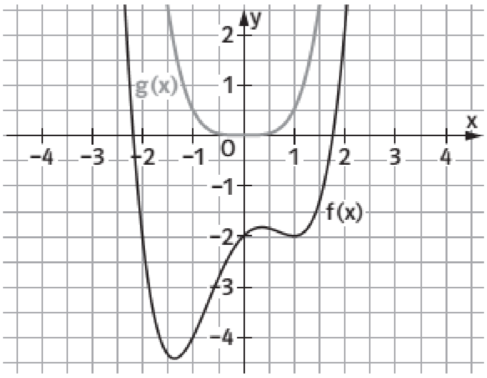
e) $f(x) = (3x + 6) \cdot (x^2 - 8x + 16) = 3x^3 - 18x^2 + 96$
Grad 3; $a_3 = 3$; $a_2 = -18$; $a_1 = 0$; $a_0 = 96$ (Absolutglied)

f) $f(x) = (-2x^2 + 6x) \cdot (x^2 - 9x + 20)$
$= -2x^4 + 24x^3 - 94x^2 + 120x$
Grad 4; $a_4 = -2$; $a_3 = 24$; $a_2 = -94$; $a_1 = 120$; $a_0 = 0$ (Absolutglied)

2 a) Für $x \to \pm\infty$ verhält sich das Schaubild von f wie das Schaubild der Funktion g mit $g(x) = 4x^3$. Damit strebt das Schaubild von f für $x \to -\infty$ gegen $-\infty$ und für $x \to \infty$ gegen ∞.
Zeichnung der Schaubilder von f und g:



b) Für $x \to \pm\infty$ verhält sich das Schaubild von f wie das Schaubild der Funktion g mit $g(x) = 0{,}5\,x^4$.
Damit strebt das Schaubild von f für $x \to \pm\infty$ gegen ∞.
Zeichnung der Schaubilder von f und g:



3 Vermutungen aufgrund des Grades von f und des Vorzeichens der führenden Koeffizienten:

a) $f(-1000)$ negativ, $f(1000)$ positiv
b) $f(-1000)$ positiv, $f(1000)$ negativ
c) $f(-1000)$ positiv, $f(1000)$ positiv
d) $f(-1000)$ negativ, $f(1000)$ negativ
e) $f(-1000)$ negativ, $f(1000)$ positiv
f) $f(x) = (x^2 - 10\,000) \cdot x = x^3 - 10\,000\,x$
$f(-1000)$ negativ, $f(1000)$ positiv

Überprüfungen mithilfe des Taschenrechners:

a) $f(-1000) \approx -2 \cdot 10^9 < 0$, $f(1000) \approx 1{,}99 \cdot 10^9 > 0$
b) $f(-1000) \approx 1 \cdot 10^{15} > 0$, $f(1000) \approx -1 \cdot 10^{15} < 0$
c) $f(-1000) \approx 1 \cdot 10^{12} > 0$, $f(1000) \approx 1 \cdot 10^{12} > 0$
d) $f(-1000) \approx 3 \cdot 10^{24} > 0$, $f(1000) \approx 3 \cdot 10^{24} > 0$
e) $f(-1000) \approx -2 \cdot 10^9 < 0$, $f(1000) = 0$,
$f(10\,000) = 9 \cdot 10^{11} > 0$
f) $f(-1000) = -9{,}9 \cdot 10^8 < 0$, $f(1000) = 9{,}9 \cdot 10^8 > 0$

5 a) Für $x \to \pm\infty$ verhält sich das Schaubild von f wie das Schaubild der Funktion g mit $g(x) = x^3$. Damit strebt das Schaubild von f für $x \to -\infty$ gegen $-\infty$ und für $x \to \infty$ gegen ∞. Für x nahe 0 verhält sich das Schaubild von f wie das Schaubild der Funktion h mit $h(x) = x^2 + 1$.

b) Für $x \to \pm\infty$ verhält sich das Schaubild von f wie das Schaubild der Funktion g mit $g(x) = -3x^5$. Damit strebt das Schaubild von f für $x \to -\infty$ gegen $+\infty$ und für $x \to \infty$ gegen $-\infty$. Für x nahe 0 verhält sich das Schaubild von f wie das Schaubild der Funktion h mit $h(x) = 3x^2$.

c) $f(x) = (x + 2) \cdot (x^2 - 5x + 4) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$; für $x \to \pm\infty$ verhält sich das Schaubild von f wie das Schaubild der Funktion g mit $g(x) = x^3$. Damit strebt das Schaubild von f für $x \to -\infty$ gegen $-\infty$ und für $x \to \infty$ gegen ∞. Für x nahe 0 verhält sich das Schaubild von f wie das Schaubild der Funktion h mit $h(x) = -6x + 8$.

d) Für $x \to \pm\infty$ verhält sich das Schaubild von f wie das Schaubild der Funktion g mit $g(x) = -0{,}1 \cdot x^7$. Damit strebt das Schaubild von f für $x \to -\infty$ gegen ∞ und für $x \to \infty$ gegen $-\infty$. Für x nahe 0 verhält sich das Schaubild von f wie das Schaubild der Funktion h mit $h(x) = 250x$.

6 Fig. 1: Schaubild der Funktion $f_4(x)$;
Fig. 2: Schaubild der Funktion $f_3(x)$;
Fig. 3: Schaubild der Funktion $f_1(x)$;
Fig. 4: Schaubild der Funktion $f_5(x)$;
das Schaubild der Funktion

$$\begin{aligned} f_2(x) &= (x-2) \cdot (x+1) \cdot (x-1) + 4 \\ &= (x-2) \cdot (x^2 - 1) + 4 = x^3 - 2x^2 - x + 6 \end{aligned}$$

schneidet die y-Achse bei 6 und gehört somit zu keinem der gezeigten Schaubilder.