Nullstellen von Funktionen vom Grad n > 2

Ausklammern

Information

a) Ausklammern   Bsp.: $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$
$x^3 - 2x^2 - 3x = 0$

Bei Gleichungen ohne Konstante kann man x oder eine Potenz von x ausklammern. Dadurch wird die Gleichung in ein Produkt aus zwei Faktoren zerlegt.

$$x(x^2 - 2x - 3) = 0$$

Das Produkt besteht aus den beiden Faktoren x und x^2-2x-3.
Nach dem Satz vom Nullprodukt hat ein Produkt immer dann den Wert Null hat, wenn mindestens einer der Faktoren den Wert Null hat. In diesem Fall ist der Faktor x genau dann gleich Null, wenn x selbst den Wert 0 hat.
Damit haben wir schon eine Lösung für die Gleichung. Die zweite Lösung ergibt sich aus dem Nullsetzen des zweiten Faktors $x^2-2x-3 = 0$.
Das Lösen der quadratischen Gleichung ergibt $x_2 = 3$ und $x_3 = -1$.
Der Graph besitzt also drei Nullstellen an den genannten Stellen.

Zusammenfassung: $x^3 - 2x^2 - 3x = 0$ | x ausklammern
$x(x^2 - 2x - 3) = 0$ | beide Faktoren Null setzen
$\mathbf{x_1 = 0}$
$\mathbf{x_2 = 3}$
$\mathbf{x_3 = -1}$ N1(-1/0); N2(0/0); N3(3/0)

Dieses Verfahren kann immer dann angewendet werden, wenn jeweils lineare oder quadratische Terme ausgeklammert werden können.

Arbeitsauftrag

1. **Lies die Informationen selbst und versuche den dargestellten Verfahren zur Bestimmung der Nullstellen zu verstehen.**

2. **Bearbeite die Aufgaben auf der Seite 4.**

Nullstellen von Funktionen vom Grad n > 2

Substitution

Information

b) Substitution Bsp.: $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ → $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

In diesem Fall handelt es sich um eine sog. biquadratischen Gleichung, die nur aus geradzahligen Potenzen von x besteht.
Wir ersetzen (substituieren) x^2 durch z ($z = x^2$). Dann gilt:

$z^2 - 5z + 4 = 0$ | Lösen der quadratischen Gleichung
$z_1 = 1$
$z_2 = 4$

Da wir eine Lösung für x suchen und nicht für z, müssen wir die Substitution wieder rückgängig machen. $z = x^2$

für z_1: $1 = x^2$ | $\sqrt{\ }$
$\mathbf{x_1 = -1}$ **und** $\mathbf{x_2 = +1}$

für z_2: $4 = x^2$ | $\sqrt{\ }$
$\mathbf{x_3 = -2}$ **und** $\mathbf{x_4 = 2}$

Wir erhalten vier Nullstellen N1(-2/0), N2(-1/0), N3(1/0) und N4(2/0)

Arbeitsauftrag

1. **Lies die Informationen selbst und versuche den dargestellten Verfahren zur Bestimmung der Nullstellen zu verstehen.**

2. **Bearbeite die Aufgaben auf der Seite 4.**

Nullstellen von Funktionen vom Grad n > 2

Polynomdivision

Information

c) Polynomdivision Bsp.: $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ → $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$

Häufig gelingt es durch Ausprobieren eine ganzzahlige Lösung zu finden. In diesem Fall findet man durch Einsetzen von kleinen ganzzahligen Werten eine Lösung für $\mathbf{x_1 = 2}$.
Nach der Regel, dass ein Produkt dann den Wert Null hat, wenn mindestens ein Faktor gleich Null ist (Satz vom Nullprodukt) können wir die Gleichung jetzt in zwei Faktoren zerlegen, deren einer der Linearfaktor (x - 2) ist.

$$x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x-2)(ax^2 + bx + c)$$

Das Verfahren des Ausklammerns eines Linearfaktors aus einem Polynom funktioniert im Prinzip wie das schriftliche Dividieren und wird Polynomdivision genannt. Wenn x_1 eine Nullstelle ist, darf dabei kein Rest entstehen.

$$\begin{array}{l}
(x^3 + 2x^2 - 5x - 6) : (x-2) = x^2 + 4x + 3 \\
-(x^3 - 2x^2) \\
\text{---------} \\
\qquad 4x^2 - 5x \\
\qquad -(4x^2 - 8x) \\
\qquad \text{----------} \\
\qquad\qquad 3x - 6 \\
\qquad\qquad -(3x - 6) \\
\qquad\qquad \text{---------} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Der auszuklammernde quadratische Term ist $x^2 + 4x + 3$
Somit gilt: $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x-2)(x^2 + 4x + 3)$
Die beiden Lösungen für $x^2 + 4x + 3$ sind $\mathbf{x_2 = -1}$ und $\mathbf{x_3 = -3}$, der Graph besitzt die Nullstellen N1(-3/0), N2(-1/0) und N3(2/0).

Arbeitsauftrag

1. **Lies die Informationen selbst und versuche den dargestellten Verfahren zur Bestimmung der Nullstellen zu verstehen.**

2. **Bearbeite die Aufgaben auf der Seite 4.**

Übungsaufgabe

Aufgaben

Berechnen Sie die Nullstellen der folgenden Aufgaben auf 2 Dezimalstellen genau.

1. Ausklammern

a)	$f(x) = 2x^3-x^2-4x$	b)	$f(x) = -x^4+2x^3$
c)	$f(x) = 0{,}2x^3-x^2-1{,}2x$	d)	$f(x) = x^5-x^3$
e)	$f(x) = -0{,}5x^3+4x$	f)	$f(x) = 0{,}1x^5-0{,}5x^3-0{,}5x^2$

2. Substitution

a)	$f(x) = x^4-8x^2-9$	b)	$f(x) = x^4-x^2-1$
c)	$f(x) =x^4-6x^2+2$	d)	$f(x) = 0{,}2x^5-2x^3+x$
e)	$f(x) = 0{,}3x^4-2x^2-5$	f)	$f(x) = 2x^4-9{,}125x^2+4{,}5$

3. Polynomdivision

a)	$f(x) = 0{,}5x^3-1{,}5x^2-3x+4$	b)	$f(x) = x^3-3x+2$
c)	$f(x) = -x^4+2x^3-1$	d)	$f(x) = x^3+8{,}5x^2+3{,}5x-4$
e)	$f(x) = x^3+7x^2+2x-40$	f)	$f(x) = -x^3-2x^2+4x+3$

Selbstkontrolle über Geogebra

Hinweis: Nachdem man auf die Menüleiste „Nullstellen“ geklickt hat, klickt man noch mal auf den Graph, um die Nullstellen darzustellen.