Leerseite für Aufgabenstellung

Leerseite für Aufgabenstellung

Leerseite für Aufgabenstellung

Punkte | Anfordrgs. - Bereich:

1. Aufgabe

1.1

Der rechte Graph gibt die Auslenkung gegenüber dem Ursprung an. Der Graph ist kontinuierlich im positiven Bereich, das bedeutet, dass der Controller nach **LINKS** bewegt wird, da lt. Schema-Zeichnung oben, der linke Bereich positiv markiert ist.

3 | II

1.2

Die allgemeine Funktionsgleichung vierten Grades und deren Ableitungen lauten:

$$s(t)=at^4+bt^3+ct^2+dt+e$$

$$s'(t)=4\mathrm{at}^3+3\mathrm{bt}^2+2\mathrm{ct}+d \quad , \quad s''(t)=12\mathrm{at}^2+6\mathrm{bt}+2\mathrm{c}$$

aus dem Text gehen folgende Punkte hervor:

2 | I

$$s(0)=15 \;\Rightarrow\; e=15$$

$$s''(0)=114 \;\Rightarrow\; c=57$$

2

Die benötigte Funktionsgleichung $s(t)$ ergibt sich durch Aufstellen eines Linearen Gleichungssystems:

$$I.\ s'(1)=0 \;\Rightarrow\; 4\mathrm{a}1^3+3\mathrm{b}1^2+114+d=0$$

$$II.\ s'(1{,}5)=4{,}75 \;\Rightarrow\; 4\mathrm{a}(1{,}5)^3+3\mathrm{b}(1{,}5)^2+114(1{,}5)+d=4{,}75$$

$$III.\ s'(3)=-20 \;\Rightarrow\; 4\mathrm{a}(3)^3+3\mathrm{b}(3)^2+114(3)+d=-20$$

3 | I

Damit ergibt sich ein LGS(3):

$$\begin{array}{ll} I. & 4\mathrm{a}+3\mathrm{b}+1\mathrm{d} = -114 \\ II. & 13{,}5a+6{,}75b+1\mathrm{d} = -166{,}25 \\ III. & 108\mathrm{a}+27\mathrm{b}+d = -362 \end{array}$$

mit Hilfe des Determinanten Verfahrens können die Werte für a, b und d bestimmt werden.

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 13{,}5 & 6{,}75 & 1 \\ 108 & 27 & 1 \end{vmatrix} \qquad D_1 = \begin{vmatrix} -114 & 3 & 1 \\ -166{,}25 & 6{,}75 & 1 \\ -362 & 27 & 1 \end{vmatrix}$$

Analog für D_2 und D_3

5 | II

Dann ergeben sich die Ergebnisse der Determinanten:

$D=-162 \quad D_1=-324 \quad D_2=3078$ und $D_3=10530$

$$a=\frac{D_1}{D}=2 \quad , \quad b=\frac{D_2}{D}=-19 \quad , \quad d=\frac{D_3}{D}=-65$$

3 | II

Damit lautet Funktionsgleichung: $s(t)=2\cdot t^4-19\cdot t^3+57\cdot t^2-65\cdot t+15$

1

	Punkte	Anfordrgs. - Bereich:
1.3 Bestimme zunächst die zweite Ableitung: $s'(t)=8t^3-57t^2+114t-65$, $s''(t)=24t^2-114t+114$	4	I
<u>notwendige Bedingung:</u> $s''(t)=0$ $0=24t^2-114t+114$ nach Lösen der quadratischen Gleichung: $t_1=3{,}32$ und $t_2=1{,}43$ als mögliche Extrema	3	II
allerdings lt. Aufgabe ist $t_1=3{,}32$ nicht im darstellbaren Bereich	1	
<u>hinreichende Bedingung mit Vorzeichenwechselkriterium:</u> $s''(1{,}33)>0$, $s''(1{,}53)<0$ $\Rightarrow$ bei $t_2=1{,}43$ liegt eine Wendestelle vor. Das bedeutet bei $t_2=1{,}43$ wechselt der Graph die Richtung.	2	I
1.4 Bei einem Maximum muss die Ableitung an der entsprechenden Stelle eine Nullstelle haben, dazu $s'(t)=8t^3-57t^2+114t-65$ $s'(2)=-1$ => notwendige Bedingung für ein Maximum nicht erfüllt Also kann bei $t_1=2$ kein Maximum vorliegen.	5	III
1.5 Der Graph von h(t) lässt nur eine lineare Funktionsgleichung für h(t) zu. Daher werden zwei Punkte aus dem Graph abgelesen $P_1(0/0)$ und $P_2(3/15)$ Daraus lässt sich die lineare Funktionsgleichung $w(t)=\frac{15}{3}t$ ermitteln.	4	I
=> $w'(t)=\frac{15}{3}$ => $w'(2)=\frac{15}{3}$ und $s'(1)=0$ lt. Text in Aufg. 2)	3	II
Daraus ergibt sich nun $r(1)=\sqrt{0+(\frac{15}{3})^2}=\frac{15}{3}$	2	
Hinweis an den Korrektor: Ablesefehler aus dem Graphen sollen soweit nachvollziehbar nur mit geringem Punktabzug belegt werden.	$\sum_1 =43$	

	Punkte	Anfordrgs. - Bereich:

2. Aufgabe

2.1

Bei k Leistungssträngen werden die einzelnen Leistungstränge aufaddiert, damit ergibt sich in mathematischer Kurzschreibweise unter Verwendung des Summenzeichens:

4 I

$$T_k = \sum_{i=1}^{k} \left(P_{Vi} \cdot (R_{ICi} + R_{Gi})\right)$$

2.2

Zunächst Bildungsgesetz für P_{V1} :

Aus der Wertetabelle lässt sich der konstante Zuwachs erkennen, daher wird in jedem Schritt 2,5 addiert, daraus ergibt sich das Bildungsgesetz:

II

$$P_{V1}(n) = 15 + 2{,}5 \cdot (n-1)$$

3

Bei P_{V2} muss zunächst zwischen Zähler und Nenner unterschieden werden:

Zähler	18	15	12	9
Nenner	1	2	3	4

III

Daraus lässt sich ein Bildungsgesetz ableiten:

5

$$P_{V2}(n) = \frac{18 - 3(n-1)}{n}$$

2.3

Stelle zunächst eine Ungleichung auf:

$T_3(n) > 80$ mit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

=> $$\frac{(12{,}5n + 21 - 3\mathrm{n} + 2{,}5n^2)}{n} > 80$$

II

=> $2{,}5n^2 + 9{,}5n + 21 > 80\mathrm{n}$

4

=> $2{,}5n^2 - 70{,}5n + 21 > 0$

Diese quadratische Un-Gleichung lässt sich auflösen nach:

III

$n_1 < 0{,}30$ und $n_2 > 27{,}89$

3

Der rechnerische Wert vor der 1. Messung ist praktisch unmöglich, da die Leistungsentwicklung erst mit der 1. Messung beginnt, daher kommen nur Werte größer als n_2 in Betracht.

2

Also überschreitet der Kühler beginnend mit der 28. Sekunde seine maximale Temperaturerhöhung.

	Punkte:	Anfordrgs. - Bereich:
2.4		
Das Bildungsgesetz für eine geometrische Folge lautet: $P_{V3}(n)=a_1 q^{(n-1)}$	3	I
In der 2. Sekunde gilt dann $P_{V3}(2)=a_1 0{,}3^{(2-1)}$ => $a_1=\frac{100}{3}$	2	
Also ergibt sich: $P_{V3}(n)=\frac{100}{3}\cdot 0{,}3^{(n-1)}$		
Damit lassen sich die Werte für $n=3$ und $n=4$ berechnen:	3	I
2.5 Zur Überprüfung muss ein mathematischer Beweis geführt werden:	6	III
	$\sum_2 =35$	

2.4

Das Bildungsgesetz für eine geometrische Folge lautet:

$$P_{V3}(n)=a_1 q^{(n-1)}$$

In der 2. Sekunde gilt dann $P_{V3}(2)=a_1 0{,}3^{(2-1)}$ => $a_1=\frac{100}{3}$

Also ergibt sich:

$$P_{V3}(n)=\frac{100}{3}\cdot 0{,}3^{(n-1)}$$

Damit lassen sich die Werte für $n=3$ und $n=4$ berechnen:

Leistungs-strang	***1. Sekunde***	***2. Sekunde***	***3. Sekunde***	***4. Sekunde***
P_{V3}	$\frac{100}{3}W$	10W	3W	$0{,}9\,W$

2.5

Zur Überprüfung muss ein mathematischer Beweis geführt werden:

Beh.: $P_{V1}(n)=15+2{,}5\cdot(n-1)$ ist arithmetisch

Bew.: $P_{V1}(n+1)-P_{V1}(n)$

$$= 15+2{,}5\cdot(n+1-1)-(15+2{,}5\cdot(n-1))$$

$$= 2{,}5n-2{,}5n+2{,}5 = 2{,}5$$

also ist für alle $n\in\mathbb{N}$ die Differenz zweier aufeinanderfolgender Glieder konstant, das bedeutet $P_{V1}(n)$ ist arithmetisch.

Alternativ funktioniert der Beweis mit dem angegebenen alternativen BiGe genauso.

	Punkte	Anfordrgs. - Bereich:
3. Aufgabe		
3.1		
Bei dem Graph B überschreitet der Strom die gewünschte Begrenzung im Vergleich zu den Graphen A und C.	2	I
Hinweis an den Korrektor: Durch die offene Fragestellung sind auch andere sinnvolle Schülerantworten möglich und falls nachvollziehbar begründet auch als richtig zu werten.		
3.2		
Laut grafischer Darstellung sinkt der Strom nach dem initialen Anstieg zunächst und steigt gegen Ende nochmal kurz an. In der gewählten mathematischen Modellierung hat man eine lineare Funktion für diesen Abschnitt gewählt, damit wird der letzte Anstieg nicht korrekt modelliert.	5	III
Hinweis an den Korrektor: Durch die offene Fragestellung sind auch andere sinnvolle Schülerantworten möglich und falls nachvollziehbar begründet auch als richtig zu werten.		
3.3		
Für den Anstieg des Stroms ist die Ableitung von $i(t)$ zu bestimmen:		
Für $i'(t_1=16)$ gilt die zweite Teilfunktion, also: $i'(16)=\frac{50}{3}$	2	I
Für $i'(t_1=55)$ gilt die vierte Teilfunktion, also zunächst die Ableitung von $i_4(t)$ berechnen		
$i_4(t)=42.8\cdot e^{(\frac{-1}{5}t+\frac{48}{5})}+5.2$ daraus folgt mit Kettenregel:		
$i'_4(t)=42.8\cdot e^{(\frac{-1}{5}t+\frac{48}{5})}\cdot\frac{-1}{5}$	4	II
Daraus folgt $i'_4(55)=-2{,}11$	2	
3.4		
Differenzierbar an einer Stelle bedeutet, dass die Steigungen der Teilfunktionen von links und von rechts in dem Punkt exakt gleich sind.		II
An der Stelle $t_3=18$ treffen sich aber zwei lineare Funktionen mit unterschiedlichen Steigungen (einmal positiv und einmal negativ), daher kann die Funktion $i(t)$ an dieser Stelle nicht differenzierbar sein.	5	

	Punkte:	Anfordrgs. - Bereich:
3.5		
Um zu bestimmen ob der Übergang der abschnittsweise definierten Funktion f(x) stetig ist, muss der Übergang bei $t_4 = 48$ auf Stetigkeit untersucht werden.		
linksseitiger Limes LSL(48): $t_n = t_0 - \frac{1}{n} = 48 - \frac{1}{n}$	1	I
$\lim\limits_{n\to\infty}(i(t_n)) = \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{-1}{15}(48-\frac{1}{n}) - \frac{256}{5}) = -\frac{48}{15} - 0 + \frac{256}{15} = 48$	2	II
rechtsseitiger Limes RSL(48): $t_n = t_0 + \frac{1}{n} = 48 + \frac{1}{n}$	1	I
$\lim\limits_{n\to\infty}(i(t_n)) = \lim\limits_{n\to\infty}(42{,}8\cdot e^{(\frac{-1}{5}(48+\frac{1}{n})+\frac{48}{5})} + 5{,}2) =$ $\lim\limits_{n\to\infty}(42{,}8\cdot e^{(\frac{-48}{5}-\frac{1}{5\text{n}}+\frac{48}{5})} + 5{,}2) = \lim\limits_{n\to\infty}(42{,}8\cdot e^{(\frac{-1}{5\text{n}})} + 5{,}2) =$ $42{,}8\cdot e^{(\frac{-1}{\infty})} + 5{,}2 = 42{,}8\cdot e^{0} + 5{,}2 = 42{,}8\cdot 1 + 5{,}2 = 48$	3	II
jetzt noch den Funktionswert überprüfen: $i(48) = 48$, d.h. $RSL(48) = LSL(48) = i(48)$, also ist $i(t)$ stetig bei $t_4 = 48$	1	II
3.6		
Bei einem unendlich langen Vorgang muss man rechnerisch mit einer Grenzwert-Betrachtung argumentieren:		
$\lim\limits_{t\to\infty}(i(t)) = \lim\limits_{t\to\infty}(42.8\cdot e^{(\frac{-1}{5}t+\frac{48}{5})} + 5.2) =$ $\lim\limits_{t\to\infty}(42.8\cdot e^{(\frac{-1}{5}t+\frac{48}{5})}) + \lim\limits_{t\to\infty}(5{,}2) = 42.8\cdot\lim\limits_{t\to\infty}(e^{(\frac{-1}{5}t+\frac{48}{5})}) + 5{,}2 =$ $42{,}8\cdot\lim\limits_{t\to\infty}(e^{\frac{(-t+48)}{5}}) + 5{,}2 = 42{,}8\cdot\lim\limits_{t\to\infty}(\frac{1}{e^{\frac{(t-48)}{5}}}) + 5{,}2 =$ $42{,}8\cdot\frac{1}{e^{\frac{(\infty-41)}{20}}} + 5{,}2 = 42{,}8\cdot\frac{1}{e^{\infty}} + 5{,}2 = 42{,}8\cdot 0 + 5{,}2 = 5{,}2$	5	II
also ist die maximal erreichbare Stromstärke 5,2 V.		

	Punkte:	Anfordrgs. - Bereich:
3.7		
Die Ladungsmenge Q lässt sich über die Integration über $i(t)$ ermitteln:		
$Q=\int_{18}^{50} i(t)dt$, weil $i(t)$ aus zwei Teilfunktion besteht kann man:		
$\int_{18}^{50} i(t)dt = \int_{18}^{48} i_3(t)dt+\int_{48}^{50} i_4(t)dt$	1	**I**
Stammfunktion für $i_1(t)=\frac{-1}{15}t+\frac{256}{5}$ ist sehr einfach gefunden		**II**
$I_1(t)=\frac{-1}{30}t^2+\frac{256}{5}t$	2	
Aus dem Bilden der Ableitung kann eine Stammfunktion für $i_4(t)$ berechnet werden. <u>Nebenrechnung</u> $i_4{}'(t)=42.8\cdot e^{(\frac{-1}{5}t+\frac{48}{5})}\cdot\frac{-1}{5}$ daraus ergibt sich dann das der Exponentialterm wie folgt aufgeleitet werden kann, aufgrund der Kettenregel $SF(42.8\cdot e^{(\frac{-1}{5}t+\frac{48}{5})})=-5\cdot 42.8\cdot e^{(\frac{-1}{5}t+\frac{48}{5})}$ Damit ergibt sich als gesuchte Stammfunktion: $I_4(t)=-5\cdot 42.8\cdot e^{(\frac{-1}{5}t+\frac{48}{5})}+5.2t$	4	**III**
Damit kann jetzt die transportierte Ladungsmenge berechnet werden: $Q=\left[\frac{-1}{30}t^2+\frac{256}{5}t\right]_{18}^{48}+\left[-5\cdot 42.8\cdot e^{(\frac{-1}{5}t+\frac{48}{5})}+5.2t\right]_{48}^{50}$ $= 1470+80{,}95 = 1550{,}95$ Damit ergibt sich eine transportierte Ladungsmenge von 1550,95 As Coulomb.	2	**II**
	$\sum_3 =42$	

AFB-Berechnung:

Zusammenfassend wird hier die Verteilung der einzelnen Punkte für jede Aufgabenstellung aufgelistet und die Verteilung auf die einzelnen Anforderungsbereiche dargestellt.

Gesamtpunkte 120

	AFB I	AFB II	AFB III
Prozent	**30,00%**	**45,00%**	**25,00%**
Summe	**36**	**54**	**30**

Aufgabe 1			**43**
	AFB I	AFB II	AFB III
	17	21	5
1.1		3	
1.2	2		
	2		
	3		
		5	
		3	
		1	
1.3	4		
		3	
		1	
	2		
1.4			5
1.5	4		
		3	
		2	

Aufgabe 2			**35**
	AFB I	AFB II	AFB III
	12	7	16
2.1	4		
2.2		3	
			5
2.3		4	
			3
			2
2.4	3		
	2		
	3		
2.5			6

Aufgabe 3			**42**
	AFB I	AFB II	AFB III
	7	26	9
3.1	2		
3.2			5
3.3	2		
		4	
		2	
3.4		5	
3.5	1		
		2	
	1		
		3	
		1	
3.6		5	
3.7	1		
		2	
			4
		2	

Konkrete auf die Aufgabenstellung bezogene unterrichtliche Voraussetzungen:

Aufgaben Nr:	*Didaktische Jahresplanung (lfd. Nr)*	*Themenbereiche*
1	Unterstufe: 5-15 Mittelstufe: 28-29 Oberstufe: 61-62, 66-68, 70	Interpretation grafischer Darstellungen, ganz-rationale Funktionen, Extremwerte, Wendestellen Ableitungen Anwendung: Interpretation von Zusammenhänge, Pandemie-Verhalten, Wellen-Betrachtungen, Weg-Zeit-Diagramme
2	Unterstufe: 13 Mittelstufe: 30-39	Zahlenfolgen, Bildungsgesetze, Grenzwerte, Schranken, Aufstellen und Beweisen von Behauptungen, Summenzeichen Anwendung: Wachstumsprozesse, elektro-technische Anwendunge, Interpolation
3	Unterstufe: 12, 18, 20 Mittelstufe: 41-46, 48, 49 Oberstufe: 59, 60, 63, 74-79	abschnittsw. def. Fktn, Lineare Gleichungssysteme, Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Integralrechnung, Exponentialfunktion Anwendung: Physikalische Anwendungen, informationstechnische Anwendungen (Splines), Mittlere Abweichung, Flächenberechnungen

Bewertungskriterien:

Die Gewichtung der Aufgabenteile wird durch die in den Lösungen angebenen Punkteverteilungen angegeben.
Eine Aufgabe gilt als gelöst, wenn der Lösungsweg und das Ergebnis richtig sind.
Der Lösungsweg muss eindeutig, nachvollziehbar und in lesbarer Form sein.
Wenn der Ansatz nicht korrekt ist und aus diesem Grund ein anderes, aber nicht der Aufgabenstellung entsprechendes Ergebnis erreicht wird, wird die Lösung als falsch gewertet.
Es erfolgt ein Punktabzug, wenn der Ansatz unvollständig bzw. der Lösungsweg lückenhaft ist.
Unterläuft dem Schüler bei richtigem Lösungsweg ein Rechenfehler, so wird nur dieser mit einem Punktabzug belegt. Fehlerhafte Ergebnisse, die sich bei richtiger Rechnung aus einem vorherigen Rechenfehler ergeben, werden als Folgefehler behandelt und nicht zusätzlich mit Punktabzug belegt.
Wenn der Lösungsweg falsch und das Ergebnis zufällig richtig ist, so wird die Lösung als falsch bewertet.
Zeichnungen von Kurven in einem Koordinatensystem werden mit Bleistift gezeichnet. Bei Zeichnungen mit einem anderen Schreibgerät wird die Zeichnung als falsch bewertet.

Die Benotung der schriftlichen Arbeit erfolgt mit dem unten angegebenen Verteilungsschlüssel:

Erreichte Prozentzahl	*Note*
100-90	sehr gut
89-75	gut
74-60	befriedigend
59-45	ausreichend
30-44	mangelhaft
0-29	ungenügend